ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA

Vol.12 No 1 (1987)

О ПРИМЕНИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

ХА ЗУЙ БАНГ

Пусть G — произвольная область комплексной плоскости. Обозначим через $H(G)$ — пространство всех аналитических в G функций с топологией равномерной сходимости на компактах G. Далее, пусть $\{a_k\}$ — некоторая последовательность комплексных чисел а B—некоторое подмножество $H(G)$.

При изучении дифференциального уравнения бесконечного порядка:

$$(Ly)(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, y^{(k)}(z) = h(z)$$

в классе B естественно возникает вопрос о сходимости (в каком-нибудь смысле) ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, y^{(k)}(z)$$

или, что тоже самое, вопрос о применимости дифференциального оператора бесконечного порядка L. Вопрос о применимости дифференциальных операторов бесконечного порядка к различным классам аналитических функций рассматривался в [1 — 5]. Уточним теперь это понятие. Следуя Ю.Ф. Коробейнику [1], будем говорить, что оператор

$$(Ly)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, y^{(k)}(z)$$

применим (или абсолютно применим) к B в точке $z_0 \in G$, если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, y^{(k)}(z_0) \quad \left(\text{соответственно} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k\, y^{(k)}(z_0)|\right) \tag{1}$$

сходится для всех $y \in B$.

Если L применим (абсолютно применим) к B в каждой точке $z_0 \in G$, то будем говорить, что L применим (абсолютно применим) к B в G. Оператор L равномерно (абсолютно равномерно) применим к B в G, если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, y^{(k)}(z)$ (соответственно $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k\, y^{(k)}(z)|$) сходится равномерно внутри G (т.е. равномерно на любом замкнутом подмножестве G) для всех $y \in \bar{B}$. Наконец, $\hat{L}$ регулярно применим к B в G, если

$$\sum_{k=0}^{\infty} M\,[a_k y^{(k)}(z), F] < \infty$$

для любых замкнутых множеств $F \subset G$ и любых $y \in B$ (здесь $M[y, F] = \sup\limits_{z \in F} |y(z)|$).

Ю.Ф. Коробейник в [1] нашёл критерии применимости (во всех выше приведенных смыслах) оператора L к $H(G)$. В настоящей работе даются аналогичные критерии применимости данного оператора к собственным классам $H(G)$, а именно, к $H_q(G)$. Оказывается, что эти критерии существенно зависят от геометрии области G и если L применим к $H_q(G)$ в G, то он непрерывно отображает $H(G)$ в $H(G)$ (обратное заключение, очевидно, справедливо).

Дадим теперь определение $H_q(G)$: Пусть n — произвольное натуральное число, G — произвольная область комплексной плоскости, инвариантна относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{n}$ вокруг начала координат а $w = \exp\frac{2\pi i}{n}$. Введем следующие операторы:

$$(A_q f)(z) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} w^{-qj} f(w^j z),\ q = 0,1, \ldots, n-1.$$

Положим $H_q(G) = A_q\,(H\,(G))$ и введем в нем топологию, индуцированную из $H(G)$ ($q = 0,1, \ldots n-1$). Тогда оно как замкнутое подпространство пространства Фреше $H(G)$ само является пространством Фреше.

Отметим некоторые свойства операторов A_q (см. [6], стр. 87), которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$A_p \cdot A_q = 0, \text{ если } p \neq q, \text{ и } \sum_{q=0}^{n-1} A_q = E \ (E\text{—единичный оператор}).$$

Из этих свойств следует, что любую функцию из $H(G)$ можно представить, причем единственным образом, суммой n функций из $H_q(G)$, $q = 0,1, \ldots, n-1$.

$$\text{Если } G = \mathbf{C}, \text{ то } H_q(\mathbf{C}) = \left\{ f \in H(\mathbf{C}) : f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} f_{sn+q}\, z^{sn+q} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Для того, чтобы оператор* L *был применим к* $H_q(\mathbf{C})$ *в точке* $z_0 = 0$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha_q = \varlimsup_{s\to\infty} \sqrt[sn+q]{|a_{sn+q}|\,(sn+q)!} < \infty.$$

Доказательство. Очевидно, что L применим к $H_0(\mathbf{C})$ в точке $z_0 = 0$ тогда и только тогда, когда оператор $\sum\limits_{s=0}^{\infty} a_{sn+q} D^{sn+q}$ применим к $H(\mathbf{C})$ в точке $z_0 = 0$. Последний же оператор, как было показано Ю. Ф. Коробейником [1] применим к $H(\mathbf{C})$ в точке $z_0 = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие $\alpha_0 < \infty$.

Для $q = 1, \ldots, n-1$ доказывается совершенно аналогично.

ТЕОРЕМА 2. *Для применимости оператора L к $H_q(G)$ в ненулевой точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\,k!} < \infty. \qquad (2)$$

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 3 [1]. Докажем необходимость для $q = 0$. Пусть (2) не выполняется. Тогда существует некоторая подпоследовательность $\{k_m\}$ такая, что $k_{m+1} - k_m > n$, $a_{k_m} \neq 0$, $m = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{m\to\infty} \sqrt[k_m]{|a_{k_m}|\,(k_m)!} = \infty$.

Построим функцию $y_0(z) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} y_{sn}\, z^{sn}$, где

$$y_{sn} = \begin{cases} \dfrac{|z_0|^{k_m}(sn-k_m)!}{z_0^{sn}\,|a_{k_m}|\,(sn)!}, & k_m \leqslant sn < k_m + n,\ m = 1, 2, \ldots \\ 0, & sn \notin [k_m, k_m + n),\ m = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Легко проверить, что $y_0(z) \in H_0(\mathbf{C})$ и для $m = 1, 2, \ldots$

$$|y_0^{(k_m)}(z_0)| = \sum_{\substack{s:\,k_l \leqslant sn < k_l + n\\ l \geqslant m}} \frac{1\,(sn-k_l)!}{|a_{k_l}|\,(sn-k_m)!}\,\frac{|z_0|^{k_l}}{|z_0|^{k_m}} \geqslant \frac{1}{|a_{k_m}|}$$

Это означает, что ряд (1) расходится. Теорема доказана.

Из теорем 1–2 и теоремы 3 [1] получим следующие результаты.

СЛЕДСТВИЕ 1. *L применим к $H_q(\mathbf{C})$ в какой-нибудь точке z_0 тогда и только тогда, когда L абсолютно применим к $H_q(\mathbf{C})$ в этой точке z_0.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если L применим к $H_q(\mathbf{C})$ в некоторой ненулевой точке, то L регулярно применим к $H(\mathbf{C})$ в $\mathbf{C}$.*

Если $G = \widehat{\mathbf{C}}$ — расширенная комплексная плоскость, то $H(G)$ состоит из констант, и оператор L регулярно применим к $H(G)$ в G.

Рассмотрим теперь случай, когда область G отлична от $\mathbf{C}$ и $\widehat{\mathbf{C}}$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $0 \in G$. Для применимости оператора L к $H_q(G)$ в точке $z_0 = 0$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha_q < \rho(0, \partial G).$$

Доказательство. Имеем

$$H_q(G) = \{y(z) = \sum_{j=0}^{n-1} w^{-qj} f(w^j z) : f \in H(G)\}.$$

Тогда

$$y^{(k)}(0) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} w^{(k-q)j}\right) f^{(k)}(0).$$

Но $\sum_{j=0}^{n-1} w^{(k-q)j}$ равна 0, если $k \neq q + sn$; и равна n, если $k = q + sn$, $s = 0,1,\ldots$

Тогда L применим к $H_q(G)$ в точке $z_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $\sum_{s=0}^{\infty} a_{sn+q} D^{sn+q}$ применим к $H(G)$ в точке $z_0 = 0$. По теореме 1 [1] имеем

$$\alpha_q < \rho(0, \partial G).$$

Случай, когда $z_0 \neq 0$, оказывается более трудным.

ТЕОРЕМА 4. *Для того, чтобы оператор L был применим к $H_q(G)$ в точке $z_0 \neq 0$ необходимо и достаточно, чтобы $\alpha < \rho(z_0, \partial G)$.*

Доказательство. Нам нужно доказать только необходимость, а достаточность следует из теоремы 1 [1].

Пусть $t_k y = a_k y^{(k)}(z_0)$. Тогда $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ — семейство линейных и непрерывных в $H_q(G)$ функционалов, $\{t_k\}$ поточечно ограничено в $H_q(G)$. Из этого следует, что $\{t_k\}$ равностепенно непрерывно, так как $H_q(G)$ бочечно. Поэтому существуют константа C и компакт $K \subset G$ такие, что

$$|t_m y| \leqslant C \sup_{z \in K} |y(z)| \qquad \forall\, y \in H_q(G),\ m = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

Очевидно, мы можем считать, что $z_0 \in K$ и K инвариантно относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{n}$.

Из теоремы Рунге о двух открытых множествах (см., [7]) следует, что существует подобласть G_1 области G такая, что $K \subset G_1 \Subset G$, $H(G)$ плотно в $H(G_1)$.

Пусть G_2 — такая инвариантная относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{n}$ вокруг начала координат область, что $K \subset G_2 \subset G_1$ (нетрудно убедиться, что такая область всегда существует).

Пусть $\widetilde{H}_q(G_2) = H(G_1) \cap H_q(G_2)$. Введем в $\widetilde{H}_q(G_2)$ топологию, индуцированную из $H(G_2)$. Так как $H(G)$ плотно в $H(G_1)$ и оператор A_q отображает непрерывно $H(G_1)$ в $H(G_2)$, то $H_q(G)$ плотно в $A_q(H(G_1))$, наделенном топологией $H(G_2)$. Поэтому $H_q(G)$ подавно плотно в $\widetilde{H}_q(G_2)$. Далее, так как t_m непрерывны в $H(G_2)$, $m = 0, 1, \ldots$, то из (3) получаем

$$|t_m y| \leqslant C \sup_{z \in K} |y(z)| \qquad \forall y \in \widetilde{H}_q(G_2),\ m = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что существует точка $\xi \in G \setminus G_1$ такая, что

$$|z_0 - \xi| < \rho(z_0, \partial G). \tag{5}$$

Следовательно (5) выполняется для всех ξ из некоторого круга Q из $G \setminus G_1$. Путем изменения направления ξ в круге Q можем добиться того, чтобы все $|w^j z_0 - \xi|$ были различными, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Пусть j_0 – такой номер, что

$$|w^{j_0} z_0 - \xi| < |w^j z_0 - \xi|, \; j = 0, 1, \ldots, n-1, \; j \neq j_0.$$

Положим $\beta_j = \dfrac{w^{j_0} z_0 - \xi}{w^j z_0 - \xi}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда $|\beta_j| < 1$, если $j \neq j_0$, $\beta_{j_0} = 1$.

Пусть теперь $y_0(z) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{w^{-qj}}{(w^j z - \xi)} \left(= A_q\left(\dfrac{1}{z-\xi}\right)\right)$. Так как функция $\dfrac{1}{z-\xi} \in H(G_1)$, то $y_0(z) \in \widetilde{H}_q(G_2)$. Из (4) получим

$$|t_m y_0| \leqslant C \sup_{z \in K} |y_0(z)| = C_1 < \infty, \; m = 0, 1 \ldots .$$

Но $\quad |t_m y_0| = |a_m| \, m! \left| \sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{w^{j(m-q)}}{(w^j z_0 - \xi)^{m+1}} \right| =$

$$= \frac{|a_m| \, m!}{|w^{j_0} z_0 - \xi|^{m+1}} \cdot \Big|1 + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j_0}}^{n-1} w^{j(m-q)} \beta_j^{m+1}\Big| \geqslant \frac{|a_m| \, m!}{2|w^{j_0} z_0 - \xi|^{m+1}}$$

для всех $m \geqslant m_0$. Отсюда $2C_1 |w^{j_0} z_0 - \xi|^{m+1} \geqslant |a_m| \, m!$ для всех $m \geqslant m_0$. Поэтому.

$$\alpha \leqslant |w^{j_0} z_0 - \xi| \leqslant |z_0 - \xi| < \rho(z_0, \partial G).$$

Теорема доказана.

Теоремы 3 — 4 и теорема 1 из [1] показывают, что если $G \neq \mathbf{C}, \widehat{\mathbf{C}}$ то справедливы

СЛЕДСТВИЕ 3. *Оператор* L *применим к* $H_q(G)$ *в некоторой точке* z_0 *тогда и только тогда, когда* L *абсолютно применим к* $H_q(G)$ *в точке* z_0.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если оператор* L *применим к* $H_q(G)$ *в некоторой ненулевой точке то* L *применим к* $H(G)$ в *этой же точке.*

Устремляя z_0 к ∂G, получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $G \neq \mathbf{C}, \widehat{\mathbf{C}}$. *Тогда* L *применим к* $H_q(G)$ *в* G *тогда и только тогда, когда* L *регулярно применим к* $H(G)$ *в* G, что эквивалентно $\alpha = 0$.

В заключении автор выражает благодарность профессору Ю. Ф. Коробейнику и В. П. Подпорину за внимание и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Ф. Коробейник, *О применимости дифференциальных операторов бесконечного порядка*, Сиб. матем. ж., 10 (1969), 549 – 564.
2. Ю. Ф. Коробейник, *Критерии применимости дифференциальных операторов бесконечного порядка к некоторым классам экспоненциальных функций*, Годишник на висшите технически учебни заведения, Математика, 8 (1972), книга 3, София, 8 – 17.
3. Г. Г. Брайчев, В. В. Моржаков, *О применимости операторов бесконечного порядка в частных производных*, Матем. заметки, 24 (1978), 771 — 777.
4. Ха Зуй Банг, *О применимости составного дифференциального оператора бесконечного порядка к некоторым классам аналитических функций*, Изв. СКНЦВШ, 2 (1982), 3 – 10.
5. Ха Зуй Банг, Ю .Ф. Коробейник, *О применимости составных дифференциальных операторов к некоторым классам экспоненциальных функций*, Изв. Вузов, 7 (1982), 83 – 85.
6. М. Ю. Царьков, *Изоморфизмы некоторых аналитических пространств, перестановочные со степенью оператора дифференцирования.* – Респуб. сб. « Теория функций, функциональный анализ и их приложения », 2 (1970), 86 – 92.
7. Л. Хермандер, *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, М., 1968.

Поступила в редакцию 16 июля 1984г.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ХАНОЙ, ВЬЕТНАМ