О ЗАДАЧАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НЕСКОЛЬКИМИ ОБЪЕКТАМИ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ДИСКРЕТНЫХ ИГР С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ.

ФАН ЗУЙ ХАЙ и ДИНЬ ШИ ДАЙ

В настоящее время теория дискретных игр многих лиц одно из интенсивно развивающихся направлений дифференциальных игр. В работах [5 - 7] приведены различные эффективные достаточные условия поимка за конечное число шагов. В [5], [7] были изучены дискретные игры многих лиц с интегральными ограничениями. Заметим, что в данных работах только рассматривались простые игры, которые описываются системой разностных управлений в виде

$$z_i(k+1) = A_i z_i(k) - u_i(k) + v(k); \quad z_i(0) = z^0_i, \quad i = \overline{1,m},$$

где A_i – постоянные матрицы со специальными структурами.

В данной работе рассматриваются линейные дискретные игры многих лиц в виде

$$z_i(k+1) = A_i z_i(k) - B_i(k) u_i(k) + C_i(k) v(k), \quad z_i(0) = z^0_i; \; i = \overline{1,m};$$

где A_i – также постоянные матрицы со другими специальными структурами. Найдутся эффективные достаточные условия завершения игры за конечное число шагов из данного состояния фазового пространства.

I. Пусть дискретная игра преследования одного убегающего двумя объектами описывается системой разностных уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} z_1^i(k+1) &= z_1^i(k) + \mu z_2^i(k) \\ z_2^i(k+1) &= -\alpha_2^i \mu z_1^i(k) + (1 - \mu \alpha_1^i) z_2^i(k) + \mu u_i(k) \\ z_3^i(k+1) &= z_3^i(k) + \mu z_4^i(k) \\ z_4^i(k+1) &= -\beta_2^i \mu z_3^i(k) + (1 - \mu \beta_1^i) z_4^i(k) + \mu v(k) \end{aligned}\right. \tag{1.1}$$

$i = 1,2$; $z_j^i(k) \in R^n$; $j = \overline{1,4}$; $\mu > 0$ — малый параметр, $\alpha_1^1, \alpha_1^2, \alpha_2^1, \alpha_2^2, \beta_1^1, \beta_1^2, \beta_2^1$, β_2^2 — некоторые действительные числа; $k = 0,1,\ldots$ номер шага.

Заметим, что система (1.1) можно написать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{z_1^i(k+1) - z_1^i(k)}{\mu} = z_2^i(k) \\ \dfrac{z_2^i(k+1) - z_2^i(k)}{\mu} = -\alpha_1^i z_2^i(k) - \alpha_2^i z_1^i(k) + u_i(k) \\ \dfrac{z_3^i(k+1) - z_3^i(k)}{\mu} = z_4^i(k) \\ \dfrac{z_4^i(k+1) - z_4^i(k)}{\mu} = -\beta_1^i z_4^i(k) - \beta_2^i z_3^i(k) + v(k); \; i = 1,2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что система (1.1) является дискретным аналогом системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_i + \alpha_1^i \dot{x}_i + \alpha_2^i x_i = u_i \\ \ddot{y}_i + \beta_1^i \dot{y}_i + \beta_2^i y_i = v; \; i = 1,2. \end{cases}$$

Управления $u_i(k)$ i-ого преследователя, $v(k)$ убегающего объекта удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| u_i(k) \right\|^2 \leqslant \rho_i^2; \; \sum_{k=0}^{\infty} \left\| v(k) \right\|^2 \leqslant \sigma^2; \; i = 1,2. \tag{1.2}$$

Будем говорить, что игра преследования многих лиц (1.1) — (1.2) из начального состояния $z_j^i(0)$; $j = \overline{1,4}$; $i = 1,2$, где $z_1^1(0) \neq z_3^1(0)$; $z_1^2(0) \neq z_3^2(0)$, заканчивается за K шагов, если при любом управлении $v(0), v(1), \ldots, v(K-1)$:

$$\sum_{k=0}^{K-1} \| v(k) \|^2 \leqslant \sigma^2,$$

можно построить управления $u_i(0), u_i(1), \ldots, u_i(K-1)$; $i = 1,2$, такие, что или $z_1^1(K) = z_3^1(K)$, или $z_1^2(K) = z_3^2(K)$. При этом для нахождения значения $u_i(k)$ параметра u_i в каждый шаг k; $k = \overline{0, K-1}$ разрешается использовать значения $v(k)$ и $z^i(0) = \left(z_1^i(0), z_2^i(0), z_3^i(0), z_4^i(0)\right)$.

Положим

$$z^i(k) = \left(z_1^i(k), z_2^i(k), z_3^i(k), z_4^i(k)\right)^T \in R^{4n}; \; i = 1, 2,$$

где T — знак транспонирования. Тогда система (1.1) можно написать в виде

$$z^i(k+1) = A_i z^i(k) - B_i u_i(k) + C_i v(k);\ i = 1, 2, \tag{1.3}$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} E & \mu E & \tilde{O} & \tilde{O} \\ -\alpha_2^i \mu E & (1-\mu\alpha_1^i)E & \tilde{O} & \tilde{O} \\ \tilde{O} & \tilde{O} & E & \mu E \\ & & -\beta_2^i \mu E & (1-\mu\beta_1^i)E \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

$$B_i = \begin{pmatrix} \tilde{O} \\ -\mu E \\ \tilde{O} \\ \tilde{O} \end{pmatrix};\quad C_i = \begin{pmatrix} \tilde{O} \\ \tilde{O} \\ O \\ \mu E \end{pmatrix},$$

$i = 1, 2$, где E, $\tilde{O}$ — соответсвенно единичная и нулевая матрицы. Заметим, что вид матрицы A_i в данной работе отличен от вида матрицы A_i в работах [5], [7].

ЛЕММА 1 (см. [8]). *Пусть $x_1, x_2, \ldots$ $y_1, y_2, \ldots$ связаны соотношениями*

$$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta y_{n-1} \tag{1.5}$$

$$y_n = \gamma x_{n-1} + \delta y_{n-1} \tag{1.6}$$

где $n = 2, 3, \ldots$; $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Пусть λ_1, λ_2 — корни квадратного уравнения

$$(\beta + \lambda\delta) = \lambda(\alpha + \lambda\gamma).$$

а) *Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то при всех $n = 2, 3\ldots$ имеем*

$$x_n = \frac{\lambda_2 \mu^{n-1}(x_1 + \lambda_1 y_1) - \lambda_1 \mu^{n-1}(x_1 + \lambda_2 y_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$y_n = \frac{\mu_2^{n-1}(x_1 + \lambda_2 y_1) - \mu_1^{n-1}(x_1 + \lambda_1 y_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

где $\mu_i = \alpha + \lambda_i \gamma$; $i = 1, 2$.

б) *Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, то при всех $n = 2, 3, \ldots$ имеем*

$$y_n = \begin{cases} \mu_0^{n-1}\left[y_1 + (n-1)\dfrac{\gamma}{\mu_0}(x_1 + \lambda_0 y_1) \right]; \text{ если } \dfrac{\delta - \gamma\lambda_0}{\mu_0} = 1 \\[2ex] \mu_0^{n-1}\left[\left(\dfrac{\delta - \gamma\lambda_0}{\mu_0}\right) y_1 + \dfrac{\gamma}{\mu_0}(x_1 + \lambda_0 y_1) \dfrac{\left(\dfrac{\delta - \gamma\lambda_0}{\mu_0}\right)^{n-1} - 1}{\dfrac{\delta - \gamma\lambda_0}{\mu_0} - 1} \right]; \text{ если } \dfrac{\delta - \gamma\lambda_0}{\mu_0} \neq 1 \end{cases}$$

где $\mu_0 = \alpha + \lambda_0 \gamma$.

Из (1.4) нетрудно следует, что при всех $k = 1, 2, \ldots$, имеем

$$A_i^k = \begin{pmatrix} x_k^i E & y_k^i E & \widetilde{O} & \widetilde{O} \\ p_k^i E & q_k^i E & \widetilde{O} & \widetilde{O} \\ \widetilde{O} & \widetilde{O} & s_k^i E & r_k^i E \\ \widetilde{O} & \widetilde{O} & t_k^i E & h_k^i E \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

где $i = 1,2$; E, $\widetilde{O}$ — соответственно единичная и нулевая матрицы, и последовательности x_k^i, y_k^i, s_k^i, r_k^i связаны соотношениями

$$\left(\begin{array}{l} x_1^i = 1;\ y_1^i = \mu \\ x_n^i = x_{n-1}^i + (-\alpha_2^i \mu)\, y_{n-1}^i \qquad ; \\ y_n^i = \mu\, x_{n-1}^i + (1 - \mu \alpha_1^i)\, y_{n-1}^i \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} s_1^i = 1;\ r_1^i = \mu \\ s_n^i = s_{n-1}^i + (-\beta_2^i \mu)\, r_{n-1}^i \\ r_n^i = \mu\, s_{n-1}^i + (1 - \mu \beta_1^i)\, r_{n-1}^i \end{array} \tag{1.8}$$

$i = 1, 2.$

Используем лемму 1 при $\alpha = 1$, $\beta = -\alpha_2^i \mu$, $\gamma = \mu$, $\delta = 1 - \mu \alpha_1^i$. Заметим, что в этом случае уравнение $(\beta + \lambda\delta) = \lambda(\alpha + \lambda\gamma)$ имеет вид

$$\lambda^2 + \alpha_1^i \lambda + \alpha_2^i = 0;\ i = 1,\ 2. \tag{1.9}$$

Пусть λ_1^i, λ_2^i — корни квадратного уравнения (1.9)

а) Если $\lambda_1^i \neq \lambda_2^i$, то из леммы 1 имеем

$$x_n^i = \frac{\lambda_2^i (1 + \mu \lambda_1^i)^n - \lambda_1^i (1 + \mu \lambda_2^i)^n}{\lambda_2^i - \lambda_1^i}$$

$$y_n^i = \frac{(1 + \mu \lambda_2^i)^n - (1 + \mu \lambda_1^i)^n}{\lambda_2^i - \lambda_1^i}.$$

б) Пусть $\lambda_1^i = \lambda_2^i = \lambda_0^i$. Заметим, что в этом случае

$$\mu_0^i = 1 + \mu \lambda_0^i;\ \frac{\delta - \gamma \lambda_0^i}{\mu_0^i} = 1;\ i = 1,\ 2.$$

Таким образом, из леммы 1 имеем

$$y_n = n\, \mu \left(1 + \mu\, \lambda_0^i\right)^{n-1}$$

Пусть χ^i_1, χ^i_2 — корни квадратного уравнения

$$\chi^2 + \beta^i_1\chi + \beta^i_2 = 0;\ i = 1,\ 2. \tag{1.10}$$

Аналогично имеем

а) Если $\chi^i_1 \neq \chi^i_2$, то

$$s^i_n = \frac{\chi^i_2\left(1 + \mu\chi^i_1\right)^n - \chi^i_1\left(1 + \mu\chi^i_2\right)^n}{\chi^i_2 - \chi^i_1}$$

$$r^i_n = \frac{\left(1 + \mu\chi^i_2\right)^n - \left(1 + \mu\chi^i_1\right)^n}{\chi^i_2 - \chi^i_1}.$$

б) Если $\chi^i_1 = \chi^i_2 = \chi^i_0$, то $r^i_n = n\,\mu\left(1 + \mu\chi^i_0\right)^{n-1}$.

Введем в рассмотрение подпространство M пространства R^{4n}

$$M = \{z = (z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)^{\mathrm{T}} : z_1 = z_3\}$$

Тогда его ортогональное дополнение имеет вид

$$L = \{z = (z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)^{\mathrm{T}} : z_1 = -z_3,\ z_2 = z_4 = 0\}.$$

В соответствующем базисе в L, проекция Πz имеет простой вид: $\Pi z \equiv z_1 - z_3$, где $\Pi = (E,\ \widetilde{O},\ -E,\ \widetilde{O})$ есть $(n \times 4n)$-матрица, соответствующая оператору проектирования в выбранных базисах.

Положим

$$F_i(k) = \begin{cases} \widetilde{O}, & \text{если } k \equiv 0 \\ \dfrac{r^i_k}{y^i_k}E, & \text{если } k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

$i = 1,\ 2$. Нетрудно видеть, что

$$\Pi A^k_i C_i = -\mu r^i_k E;\ \Pi A^k_i B_i F_i(k) = -\mu r^i_k E;\ k \equiv 1,\ 2,\ldots$$

$$\Pi A^0_i C_i = \Pi A^0_i B_i F_i(0) = \widetilde{O}.$$

Таким образом, при всех $k = 0,\ 1,\ldots$, имеем

$$\Pi A^k_i B_i F_i(k) = \Pi A^k_i C_i\ . \tag{1.11}$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. 1. *Уравнения* (1. 9), (1. 10) *соответственно имеют действительные различные корни* $\lambda_1^i < \lambda_2^i$; $\chi_1^i < \chi_2^i$; $i = 1, 2$. *Пусть выполнены неравенства* $\chi_2^i \leqslant \lambda_2^i \leqslant 0$; $\chi_1^i \leqslant \lambda_1^i$; $i = 1, 2$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. 2. *Уравнения* (1. 9), (1. 10) *соответственно имеют двухкратные корни* λ_o^i, χ_o^i; $i = 1, 2$. *Пусть выполнены неравенства* $\chi_o^i \leqslant \lambda_o^i \leqslant 0$; $i = 1, 2$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. 3. *Уравнение* (1. 9) *имеет действительные различные корни* $\lambda_1^i < \lambda_2^i$, *а уравнение* (1. 10) *имеет двухкратный корень* χ_o^i. *Пусть выполнены неравенства*

$$\chi_o^i \leqslant \lambda_1^i; \quad \lambda_2^i \leqslant 0; \quad i = 1, 2.$$

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. 4. *Уравнение* (1. 9) *имеет двухкратный корень* λ_o^i, *а уравнение* (1. 10) *имеет действительные различные корни* $\chi_1^i < \chi_2^i$. *Пусть выполнены* $\chi_2^i \leqslant \lambda_o^i \leqslant 0$; $i = 1, 2$.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. 5. *Уравнение* (1. 9) *имеет двухкратный корень* λ_o^i, *а уравнение* (1. 10) *имеет комплексно-сопряженные корни* $\alpha^i + i\beta^i$. *Пусть выполнены* $\alpha^i \leqslant \lambda_o^i \leqslant 0$; $i = 1, 2$.

ЛЕММА 2. *Пусть выполнено любое из предположений* 1. 1 — 1. 5. *Тогда при всех* $\varepsilon > 0$, *при всех начальных состояниях* $z^i(0) = \left(z_1^i(0), z_2^i(0), z_3^i(0), z_4^i(0)\right)^T$ *существуют целые числа* K_i; $i = 1, 2$ *и векторы* $\omega_i(0), \omega_i(1), \ldots, \omega_i(K_i)$; $i = 1, 2$, *такие, что*

a) $$\sum_{k=0}^{K_i} \| \omega_i(k) \|^2 \leqslant \varepsilon^2; \; i = 1, 2,$$

b) $$\Pi A_i^{K_i+1} z^i(0) - \sum_{k=o}^{K_i} \Pi A_i^{K_i-k} B_i \omega_i(k) = 0; \; i = 1, 2.$$

Доказательство. Нам достаточно доказать для $i = 1$.

1) Пусть выполнено предположение 1.1, т.е. $\lambda_1^i < \lambda_2^i$; $\chi_1^i < \chi_2^i$; $\chi_2^i \leqslant \lambda_2^i \leqslant 0$; $\chi_1^i \leqslant \lambda_1^i$. Возможно два случая:

I, a. Если $\lambda_2^1 = 0$, то при всех k имеем $x_k^1 = 1$;

$$y_k^1 = \frac{1 - (1 + \mu\lambda_1^1)^k}{-\lambda_1^1}\ ;\ \chi_2^1 \leqslant 0;\ \chi_1^1 \leqslant \lambda_1^1 < 0.$$

Так как $\mu > 0$ — малый параметр, то

$$0 < 1 + \mu\lambda_1^1 < 1;\ 0 < 1 + \mu\chi_1^1 < 1;\ 0 < 1 + \mu\chi_2^1 < 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to+\infty} y_k^1 = -\frac{1}{\lambda_1^1};\ \lim_{k\to+\infty} x_k^1 = 1.$$

С другой стороны имеем

$$s_k^1 = \frac{\chi_2^1(1 + \mu\chi_1^1)^k - \chi_1^1(1 + \mu\chi_2^1)^k}{\chi_2^1 - \chi_1^1};\ \chi_1^1 < \chi_2^1.$$

Поэтому

$$s_k^1 < \frac{(1 + \mu\chi_2^1)^k(\chi_2^1 - \chi_1^1)}{\chi_2^1 - \chi_1^1} = (1 + \mu\chi_2^1)^k.$$

А это значит, что

$$\lim_{k\to+\infty} s_k^1 \leqslant 1.$$

Имеем

$$\frac{r_k^1}{y_k^1} = \frac{(1 + \mu\chi_2^1)^k - (1 + \mu\chi_1^1)^k}{(1 + \mu\lambda_2^1)^k - (1 + \mu\lambda_1^1)^k} \times \frac{\lambda_2^1 - \lambda_1^1}{\chi_2^1 - \chi_1^1} =$$

$$= \frac{(1 + \mu\chi_2^1)^{k-1} + (1 + \mu\chi_2^1)^{k-2}(1 + \mu\chi_1^1) + \dots + (1 + \mu\chi_1^1)^{k-1}}{(1 + \mu\lambda_2^1)^{k-1} + (1 + \mu\lambda_2^1)^{k-2}(1 + \mu\lambda_1^1) + \dots + (1 + \mu\lambda_1^1)^{k-1}} \leqslant 1.$$

Таким образом имеем $0 < r_k^1 < y_k^1$, т.е.

$$0 \leqslant \lim_{k\to+\infty} r_k^1 \leqslant -\frac{1}{\lambda_1^1}.$$

Очевидно, что

$$\Pi A_1^{k+1} z^1(0) = x_k^1 z_1^1(0) + y_k^1 z_2^1(0) - s_k^1 z_3^1(0) - r_k^1 z_4^1(0).$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \Pi A_1^{k+1} z^1(0) \right\| \leqslant x_k^1 \left\| z_1^1(0) \right\| + y_k^1 \left\| z_2^1(0) \right\| + s_k^1 \left\| z_3^1(0) \right\| + r_k^1 \left\| z_4^1(0) \right\|.$$

Поэтому

$$\lim_{K\to+\infty}\left\| \Pi A_1^{K+1} z^1(0)\right\| \leqslant \left\| z_1^1(0)\right\| - \frac{1}{\lambda_1^1}\left\| z_2^1(0)\right\| + \left\| z_3^1(0)\right\| - \frac{1}{\lambda_1^1}\left\| z_4^1(0)\right\| \tag{1. 12}$$

Введем в рассмотрение множество

$$G(K) = \left\{ \sum_{k=0}^{K} \Pi A_1^k B_1 \omega_1(k) : \sum_{k=0}^{K} \| \omega_1(k)\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{K} -\mu y_k^1 \omega_1(k) : \sum_{k=0}^{K} \| \omega_1(k)\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \right\}.$$

Нетрудно доказать, что (см. [4]) $G(K)$ — шар в R^n с центром в нуле и с радиусом

равным $\varepsilon\mu \sqrt{\sum_{k=1}^{K}\left(y_k^1\right)^2}$.

Из $\varepsilon > 0$; $\mu > 0$, и $\lim\limits_{k\to+\infty} y_k^1 = -\frac{1}{\lambda_1^1} > 0$, имеем

$$\lim_{K\to+\infty}\left(\varepsilon\mu \sqrt{\sum_{k=1}^{K}\left(y_k^1\right)^2}\right) = +\infty. \tag{1. 13}$$

Из (1. 12), (1. 13) следует, что существуют векторы $\omega_1(0)$, $\omega_1(1)$, ..., $\omega_1(K_1)$ такие,

что $\Pi A_1^{K_1+1} z^1(0) \in G(K_1)$, т. е.

а) $\sum\limits_{k=0}^{K_1} \| \omega_1(k)\|^2 \leqslant \varepsilon^2$,

б) $\Pi A_1^{K_1+1} z^1(0) = \sum\limits_{k=0}^{K_1} \Pi A_1^{K_1-k} B_1 \omega_1(k)$.

I. 6. Если $\lambda_2^1 < 0$, то имеем

$$\lim_{k\to+\infty} y_k^1 = \lim_{k\to+\infty} x_k^1 = \lim_{k\to+\infty} r_k^1 = \lim_{k\to+\infty} s_k^1 = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{K\to+\infty}\left\| \Pi A_1^{K+1} z^1(0)\right\| = 0, \tag{1. 14}$$

В силу того, что

$$\sum_{i=1}^{k} y_i^2 > y_1^2 = \mu^2,$$

тогда имеем

$$\lim_{K\to+\infty}\left(\varepsilon\,\mu\sqrt{\sum_{k=1}^{K}\left(y_k^1\right)^2}\right)>\varepsilon\,\mu^2>0. \qquad (1.15)$$

Из (1. 14), (1. 15) следует, что существуют положительное целое число K_1 и векторы $\omega_1(0), \omega_1(1),\dots, \omega_1(K_1)$ со свойствами а, б) леммы 2.

2. б. Остальные случаи доказываются аналогично.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть выполнено любое из предположений* 1.1 — 1.5 *и* $\rho_1^2+\rho_2^2>\sigma^2$. *Тогда игра* (1.1) — (1.2) *из любой начальной точки*

$$z^i(0)=\left(z_1^i(0), z_2^i(0), z_3^i(0), z_4^i(0)\right)^T;\ i=1,2,$$

заканчивается за конечное число шагов.

Доказательство. Из предположения $\rho_1^2+\rho_2^2>\sigma^2$ следует, что существует $\varepsilon>0$ такое, что

а) $\varepsilon<\min(\rho_1,\rho_2)$,

б) $(\rho_2-\varepsilon)^2>\sigma^2-(\rho_1-\varepsilon)^2>0$.

Из леммы 2 следует, что существуют положительное целое число K_1 и векторы $\omega_1(0), \omega_1(1),\dots, \omega_1(K_1)$ такие, что

а) $$\sum_{k=0}^{K_1}\|\omega_1(k)\|^2\leqslant\varepsilon^2,$$

б) $$\Pi A_1^{K_1+1}z^1(0)-\sum_{k=0}^{K_1}\Pi A_1^{K_1-k}B_1\omega_1(k)=0. \qquad (1.16)$$

Пусть $\bar v(0), \bar v(1),\dots, \bar v(k),\dots,$ — любое допустимое управление убегающего объекта. Управление $\bar u_1(k)$; $k=\overline{0,K_1}$ первого преследователя определяется следующим образом:

$$\bar u_1(k)=\omega_1(k)+F_1(K_1-k)\,\bar v(k);\ k=\overline{0,K_1}.$$

Возможно два случая:

1. Пусть

$$\sum_{k=0}^{K_1}\|\bar v(k)\|^2\leqslant(\rho_1-\varepsilon)^2.$$

Нетрудно доказать, что если выполнено любое из предположений 1.1 — 1.5, то при всех $k=1,2,\dots$

$$0<r_k^1\leqslant y_k^1. \qquad (1.17)$$

Из неравенства Минковского имеем

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{K_1} \|\overline{u}(k)\|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{K_1} \|\omega_1(k)\|^2} +$$

$$+ \sqrt{\|\overline{v}(K_1)\|^2 + \sum_{k=0}^{K_1-1} \left\| \frac{r^1_{K_1-k}}{y^1_{K_1-k}} \right\|^2 \|\overline{v}(k)\|^2} \leqslant \varepsilon + \sqrt{\sum_{k=0}^{K_1} \|\overline{v}(k)\|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + (\rho_1 - \varepsilon) = \rho_1,$$

т.е. $u_1(\overline{k})$; $k = \overline{0, K_1}$ — допустимое.

По формуле решения разностного уравнения (1.3) имеем

$$\Pi z_1(K_1+1) = \Pi A_1^{K_1-1} z_1(0) - \sum_{k=0}^{K_1} \Pi A^{K_1-k} B_1 \overline{u_1}(k) + \sum_{k=0}^{K_1} \Pi A_1^{K_1-k} C_1 \overline{v}(k) =$$

$$= \Pi A_1^{K_1+1} z_1(0) - \sum_{k=0}^{K_1} \Pi A_1^{k_1-k} B_1 \omega_1(k) - \sum_{k=0}^{K_1} \Pi A_1^{K_1-k} B_1 F_1(K_1-k) \overline{v}(k) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{K_1} A_1^{K_1-k} C_1 \overline{v}(k).$$

Из (1.11), (1.16) следует, что $\Pi z_1(K_1+1) = 0$. А это значит, что игра заканчивается за $K_1 + 1$ шагов.

2. Если существует целое число $K_0 \leqslant K_1$ такое, что

$$\begin{cases} \sum\limits_{K=0}^{K_0-1} \|\overline{v}(k)\|^2 \leqslant (\rho_1-\varepsilon)^2, \\ \sum\limits_{k=0}^{K_0} \|\overline{v}(k)\|^2 > (\rho_1-\varepsilon)^2, \end{cases}$$

тогда управления $\overline{u}_i(k)$; $i = 1, 2$, определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \overline{u}_1(k) = \omega_1(k) + F_1(K_1-k)\,\overline{v}(k); & k = \overline{0, K_0-1} \\ \overline{u}_2(k) = 0; & \text{при всех } k = \overline{0, k_0} \end{cases}$$

При этом имеем

$$z_2(K_0+1) = A_2^{K_0+1} z_0(0) + \sum_{k=0}^{K_0} A_2^{K_0-k} C_2 \overline{v}(k).$$

Можно считать, что $\Pi z_2(K_0+1) \neq 0$. Из леммы 2 следует, что существуют положительное целое K_2 и векторы $\omega_2(0), \omega_2(1), \ldots, \omega_2(K_2)$ такие, что а) $\sum\limits_{k=0}^{K_2} \| \omega_2(k) \|^2 \leqslant \varepsilon^2$,

$$\text{б)}\quad \Pi A_2^{K_2+1} z_2(K_0+1) - \sum_{k=0}^{K_2} \Pi A_2^{K_2-k} B_2\, \omega_2(k) = 0. \qquad (1.18)$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=K_0+1}^{K_0+1+K_2} \| \bar v(k) \|^2 \leqslant б^2 - \sum_{k=0}^{K_0} \| \bar v(k) \|^2 \leqslant б^2 - (\rho_1 - \varepsilon)^2 < (\rho_2 - \varepsilon)^2.$$

Управление $\bar u_2(k+K_0+1)$; $k=\overline{0, K_2}$ определяется следующим образом

$$\bar u_2(K_0+1+k) = \omega_2(k) + F_2(K_2-k)\, \bar v(K_0+1+k);\quad k=\overline{0, K_2}.$$

Имеем $\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{K_0+1+K_2} \| \bar u_2(k) \|^2} = \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{K_2} \| \bar u_2(K_0+1+k) \|^2} =$

$$= \sqrt{\sum_{k=0}^{K_2} \| \omega_2(k) \|^2 + \| \bar v(K_0+1+K_2) \|^2 + \sum_{k=0}^{K_2-1} \left(\frac{r^2_{K_2-k}}{y^2_{K_2-k}} \right) \| \bar v(K_0+1+k) \|^2}.$$

Из неравенства Минковского имеем

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{K_0+1+K_2} \| \bar u_2(k) \|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{K_2} \| \omega_2(k) \|^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{K_2} \| \bar v(K_0+1+k) \|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \sqrt{\sum_{k=0}^{K_2} \| \bar v(K_0+1+k) \|^2} \leqslant \varepsilon + (\rho_2 - \varepsilon) = \rho_2.$$

А это значит, что $\bar u_2(k)$; $k=\overline{0, K_0+1+K_2}$ — допустимое.

Имеем

$$\Pi z_2(K_0+2+K_2) = \Pi A_2^{K_0+K_2+2} z_2(0) - \sum_{k=0}^{K_0+1+K_2} \Pi A_2^{K_0+K_2+1+k} B_2 \bar u_2(k) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{K_0+1+K_2} \Pi A_2^{K_0+K_2+1-k} C_2 \bar v(k) = \Pi A_2^{K_2+1} A_2^{K_0+1} z_2(0) -$$

$$- \sum_{k=K_0+1}^{K_0+1+K_2} \Pi A_2^{K_0+1+K_2-k} B_2 \bar u_2(k) + \sum_{k=0}^{K_0+1+K_2} \Pi A_2^{K_0+1+K_2-k} C_2 \bar v(k) =$$

$$= \Pi A_2^{K_2+1} A_2^{K_0+1} z_2(0) + \sum_{k=0}^{K_0} \Pi A_2^{K_0+1+K_2-k} C_2 \bar v(k) +$$

$$+ \sum_{k=K_0+1}^{K_0+1+K_2} \Pi A_2^{K_0+1+K_2-k} C_2 \bar v(k) - \sum_{k=0}^{K_2} \Pi A_2^{K_2-k} B_2 \bar u_2(K_0+1+k) =$$

$$= \Pi A_2^{K_2+1}\left(A_2^{K_0+1} z_2(0) + \sum_{k=0}^{K_0} A_2^{K_0-k} C_2 \overline{v}(k)\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{K_2} \Pi A_2^{K_2-k} C_2 \overline{v}(K_0+1+k) - \sum_{k=0}^{K_2} \Pi A^{K_2-k} B_2 \overline{u}_2(K_0+1+k) =$$

$$= \Pi A_2^{K_2+1} z_2(K_0+1) + \sum_{k=0}^{K_2} \Pi A_2^{K_2-k} C_2 \overline{v}(K_0+1-k) -$$

$$- \sum_{k=0}^{K_2} \Pi A_2^{K_2-k} B_2 \omega_2(k) - \sum_{k=0}^{K_2} \Pi A_2^{K_2-k} B_2 F_2 (K_2-k) \overline{v}(K+1+k).$$

Из (1.11) и (1.18) следует, что $\Pi z_2(K_0 + K_2 + 2) = 0$, т.е. игра (1. 11) — (1. 12) заканчивается за $K_0 + K_2 + 2$ шагов. Теорема доказана.

2. В этом пункте рассматривается дискретная игра, которая описывается системой разностных уравнений:

$$\begin{cases} z_1^i(k+1) = z_1^i(k) + \mu\left(z_2^i(k) - z_3^i(k)\right) \\ z_2^i(k+1) = \left[E - \mu \begin{pmatrix} \alpha_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^i \end{pmatrix}\right] z_2^i(k) + \mu u_i(k) \\ z_3^i(k+1) = \left[E - \mu \begin{pmatrix} \beta_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n^i \end{pmatrix}\right] z_3^i(k) + \mu v(k), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $i = 1,2$; $z_j^i(k) \in R^n$, $j = \overline{1,3}$, $= 1,2$; $\mu < 0$ — малый параметр; α_j^i, β_j^i, $j = \overline{1,n}$, $i = 1,2$ — положивельные числа; $k = 0,1, \dots$ номера шага; и E — единичная матрица порядка n.

Заметим, что система 2.1 можно написать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{z_1^i(k+1) - z_1^i(k)}{\mu} = z_2^i(k) - z_3^i(k) \\ \dfrac{z_2^i(k+1) - z_2^i(k)}{\mu} = -\begin{pmatrix} \alpha_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^i \end{pmatrix} z_2^i(k) + u_i(k) \\ \dfrac{z_3^i(k+1) - z_3^i(k)}{\mu} = -\begin{pmatrix} \beta_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n^1 \end{pmatrix} z_3^i(k) + v(k). \end{cases}$$

Отсюда следует, что система (2.1) является дискретным аналогом системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_i + \begin{pmatrix} \alpha_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^i \end{pmatrix} x_i = u_i \\ \ddot{y}_i + \begin{pmatrix} \beta_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n^i \end{pmatrix} y_i = v. \end{cases}$$

Если $\alpha_1^i = \alpha_2^i = \ldots = \alpha_n^i = \beta_1^i = \beta_2^i = \ldots = \beta_n^i = 1$, $i = 1, 2$ то система (2.1) является дискретным аналогом «контрольного примера» Л. С. Понтрягина (см. [1]).

Управления $u_i(k)$, $v(k)$ удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| u_i(k) \|^2 \leqslant \rho_i^2 ; \sum_{k=0}^{\infty} \| v(k) \|^2 \leqslant \sigma^2 ; i = 1, 2. \tag{2.2}$$

Будем говорить, что игра преследования многих лиц (2.1) — (2.2) из начального состояния $z_j^i(0)$; $j = \overline{1,3}$, $i = 1, 2$ где $z_1^i(0) \neq 0$; $i = 1,2$ заканчивается за K шагов, если при любом управлении $v(0), v(1), \ldots, v(K-1)$

$$\sum_{k=0}^{K-1} \| v(k) \|^2 \leqslant \sigma^2 ,$$

можно построить управления $u_i(0), u_i(1), \ldots, u_i(K-1)$; $i = 1,2$

$$\sum_{k=0}^{K-1} \| u_i(k) \|^2 \leqslant \rho_i^2 ; i = 1,2 ,$$

такие, что или $z_1^1(K) = 0$, или $z_1^2(K) = 0$. При этом для нахождения значения $u_i(k)$ параметра u_i в каждый шаг k, $k = \overline{0, K-1}$ разрешается использовать значения $v(k)$, и $z^i(0) = (z_1^i(0), z_2^i(0), z_3^i(0))^T \in R^{3n}$. Положим $z^i(k) = (z_1^i(k), z_2^i(k), z_3^i(k))^T$. Тогда система (2.1) можно написать в виде

$$z^i(k+1) = A_i z^i(k) - B_i u_i(k) + C_i v(k) ; i = 1, 2, \tag{2.3}$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} E & \mu E & -\mu E \\ \widetilde{O} & \begin{matrix} 1-\mu\alpha_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1-\mu\alpha_n^i \end{matrix} & \widetilde{O} \\ \widetilde{O} & \widetilde{O} & \begin{matrix} 1-\mu\beta_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1-\mu\beta_n^i \end{matrix} \end{pmatrix} ; B_i = \begin{pmatrix} \widetilde{O} \\ -\mu E \\ \widetilde{O} \end{pmatrix} ; C_i = \begin{pmatrix} \widetilde{O} \\ \widetilde{O} \\ \mu E \end{pmatrix} ,$$

где E, $\widetilde{O}$ — соответственно единичная и нулевая матрицы порядка n.

Легко видеть, что при всех $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$A_i^k = \begin{pmatrix} E & \begin{matrix} a^i_{1k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a^i_{nk} \end{matrix} & \begin{matrix} b^i_{1k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b^i_{nk} \end{matrix} \\ \widetilde{O} & \begin{matrix} \left(1 - \mu\alpha^i_1\right)^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \left(1 - \mu\alpha^i_n\right)^k \end{matrix} & \widetilde{O} \\ \widetilde{O} & \widetilde{O} & \begin{matrix} \left(1 - \mu\beta^i_1\right)^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \left(1 - \mu\beta^i_n\right)^k \end{matrix} \end{pmatrix}$$

где $a^i_{jk} = \mu\left[1 + \left(1 - \mu\alpha^i_j\right) + \ldots + \left(1 - \mu\alpha^i_j\right)^k\right]$

$$b^i_{jk} = \mu\left[1 + \left(1 - \mu\beta^i_j\right) + \ldots + \left(1 - \mu\beta^i_j\right)^k\right] ;\ i = 1, 2;\ j = \overline{1,n}\ ;\ k = 1, 2, \ldots$$

Введем в рассмотрение подпространство M пространства R^{3n}

$$M = \{z = (z_1, z_2, z_3)^T : z_1 = 0\}.$$

Тогда его ортогональное дополнение имеет вид

$$L = \{z = (z_1, z_2, z_3)^T : z_2 = z_3 = 0\}.$$

В соответствующем базисе в L проекция Πz имеет простой вид: $\Pi z = z_1$, где $\Pi = (E, O, \widetilde{O})$ есть $(n \times 3n)$ - матрица, соответсвующая оператору проектирования в выбранных базисах.

Положим

$$F_i(k) = \begin{cases} \widetilde{O} & \text{, если } k = 0 \\ \begin{pmatrix} \dfrac{b^i_{1k}}{a^i_{1k}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \dfrac{b^i_{nk}}{a^i_{nk}} \end{pmatrix} & \text{, если } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$i = 1, 2$. Очевидно, что

$$\Pi A_i^k C_i = \Pi A_i^k B_i F_i(k) = \begin{bmatrix} b^i_{1k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b^i_{nk} \end{bmatrix} k = 1, 2, \ldots$$

$$\Pi A_i^0 C_i^0 = \Pi A_i^0 B_i F_i(0) = 0$$

Таким образом при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$\Pi A_i^k B_i F_i(k) = \Pi A_i^k C_i. \tag{2.4}$$

ЛЕММА 3. *При всех* $\varepsilon > 0$ *и начальных состояниях* $z^i(0) = (z_1^i(0), z_2^i(0), z_3^i(0))^T$; $i = 1, 2$, *существуют положительные числа* K_i *и векторы* $\omega_i(0)$, $\omega_i(1), \ldots, \omega_i(K_i)$; $i = 1, 2$, *такие, что*

а) $\sum\limits_{k=0}^{K_i} \| \omega_i(k) \|^2 \leqslant \varepsilon^2$; $i = 1, 2$

б) $\Pi A_i^{K_i+1} z^i(0) - \sum\limits_{k=0}^{K_i} \Pi A_i^{K_i-k} B_i \omega_i(k) = 0$; $i = 1, 2$.

Доказательство. Имеем

$$\lim_{k\to+\infty} a_{kj}^i = \lim_{k\to+\infty} \frac{\mu[1-(1-\mu\alpha_j^i)^k]}{1-(1-\mu\alpha_j^i)} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1-(1-\mu\alpha_j^i)^k}{\alpha_j^i}$$

Так как $\mu > 0$ — малый параметр, поэтому

$$\lim_{k\to+\infty} a_{jk}^i = \frac{1}{\alpha_j^i}, \quad \lim_{k\to+\infty} b_{jk}^i = \frac{1}{\beta_j^i}; \quad j = \overline{1, n}; \; i = 1, 2$$

и

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| \Pi A_i^{k+1} z^i(0) \right\| =$$

$$= \left\| z_1^i(0) + \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1^i} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\alpha_n^i} \end{pmatrix} z_2^i(0) + \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_1^i} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\beta_u^i} \end{pmatrix} z_3^i(0) \right\|.$$

Введем в рассмотрение множества

$$G_i(K) = \left\{ \sum_{k=0}^{K} \Pi A_i^k B_i \omega_i(k) : \sum_{k=0}^{K} \| \omega_i(k) \|^2 \leqslant \varepsilon^2 \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{K} -\mu \begin{pmatrix} a_{1k}^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nk}^i \end{pmatrix} \omega_i(k) : \sum_{k=0}^{K} \| \omega_i(k) \|^2 \leqslant \varepsilon^2 \right\}.$$

Очевидно, что $G_i(K)$ является эллипсоидом с размерами

$$\varepsilon \sqrt{\sum_{k=1}^{K} (a_{jk}^i)^2} \quad ; \; j = \overline{1, n}$$

Так как
$$\lim_{k\to+\infty} a^i_{jk} = \frac{1}{\alpha^i_j},$$

поэтому
$$\lim_{K\to+\infty}\left(\varepsilon\sqrt{\sum_{k=1}^{K}(a^i_{jk})^2}\right) = +\infty.$$

Отсюда следует, что существуют положительные целые числа K_i ; $i = 1, 2$ такие, что

$$\Pi A^{K_i+1} z^i(0) \in G_i(K_i).$$

Лемма доказана.

Положим
$$\gamma_i = \max\left(1, \frac{\alpha^i_1}{\beta^i_1}, \ldots, \frac{\alpha^i_n}{\beta^i_n}\right);\ i = 1,2.$$

Тогда имеем

$$\sum_{k=0}^{K_i} \| F_i(k) \cdot v(K_i - k) \|^2 \leqslant \gamma_i^2 \sum_{k=0}^{K_i} \| v(k) \|^2 . \tag{2.5}$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнено неравенство*

$$\frac{\rho_1^2}{\gamma_1^2} + \frac{\rho_2^2}{\gamma_2^2} > \sigma^2$$

Тогда преследование в дискретной игре многих лиц (2.1) – (2.2) *из любой начальной точки заканчивается за конечное число шагов.*

Доказательство. Из предположения теоремы следует, что существует положительное число $\varepsilon > 0$ такое, что

а) $\varepsilon < \min(\rho_1, \rho_2)$

б) $\left(\frac{\rho_2 - \varepsilon}{\gamma_2}\right)^2 + \left(\frac{\rho_1 - \varepsilon}{\gamma_1}\right)^2 > \sigma^2.$

Из леммы 3 следует, что существуют положительное целое число K_1 и векторы $\omega_1(0), \omega_1(1), \ldots, \omega(K_1)$ такие, что

а) $$\sum_{k=0}^{K_1} \| \omega_1(k) \|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

б) $$\Pi A_1^{K_1+1} z_1(0) - \sum_{k=0}^{K_1} \Pi A_1^{K_1-k} B_1\omega_1(k) = 0.$$

Пусть $\bar v(0), \bar v(1), \ldots, \bar v(k), \ldots$ — любое допустимое управление убегающего объекта. Нам достаточно рассматривать случай

$$\sum_{k=0}^{K_1} \| \bar v(k) \|^2 \leqslant \left(\frac{\rho_1 - \varepsilon}{\gamma_1}\right)^2.$$

(Случай $\sum_{k=0}^{K_1} \| \overline{v}(k) \|^2 > \left(\frac{\rho_1 - \varepsilon}{\gamma_1}\right)^2$ доказывается аналогично теореме 1.)

Управление $\overline{u_1}(k)$, $k = \overline{0, K_1}$ определяется следующим образом

$$\overline{u}_1(k) = \omega_1(k) + F_1(K_1 - k)\overline{v}(k).$$

Имеем

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{K_1} \| \overline{u}_1(k) \|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{K_1} \| \omega_1(k) \|^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{K_1} \| F_1(K_1 - k)\overline{v}(k) \|^2}.$$

Из (2.5) следует, что

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{K_1} \left\| \overline{u}_1(k) \right\|^2} \leqslant \varepsilon + \gamma_1 \sqrt{\sum_{k=0}^{K_1} \left\| \overline{v}(k) \right\|^2} \leqslant \varepsilon + \gamma_1 \cdot \frac{\rho_1 - \varepsilon}{\gamma_1} = \rho_1 .$$

Таким образом $\overline{u_1}(k)$, $k = \overline{0, K_1}$ — допустимое. Доказательство $\Pi z_1(K_1 + 1) = 0$ аналогично доказательству теоремы 1. Теорема доказана.

3. В этом пункте рассматривается дискретная игра, которая описывается системой разностных уравнений:

$$\begin{cases} z_1^i(k+1) = z_1^i(k) + \mu z_2^i(k) \\ z_2^i(k+1) = z_2^i(k) + \mu z_2^i(k) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{p-1}^i(k+1) = z_{p-1}^i(k) + \mu z_p^i(k) \\ z_p^i(k+1) = (1 - \mu \alpha_1^i) z_p^i(k) - \mu \alpha_2^i z_{p-1}^i(k) - \ldots - \\ - \mu \alpha_p^i z_1^i(k) + \mu u_i(k) \\ z_{p+1}^i(k+1) = z_{p+1}^i(k) + \mu z_{p+2}^i(k) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{p+q-1}^i(k+1) = z_{p+q-1}^i(k) + \mu z_{p+q}^i(k) \\ z_{p+q}^i(k+1) = (1 - \mu \beta_1^i) z_{p+q}^i(k) - \mu \beta_2^i z_{p+q-1}^i(k) - \ldots - \\ - \mu \beta_q^i z_{p+1}^i(k) + \mu v(k), \end{cases} \tag{3.1}$$

где $i = 1, 2$; $z_j^i(k) \in R^n$; $j = \overline{1, p+q}$; $i = 1, 2$; $\mu > 0$ — малый параметр; $\alpha_1^i, \ldots, \alpha_p^i, \beta_1^i, \ldots, \beta_q^i$ — некоторые действительные числа, $k = 0, 1, \ldots$ — номер шага; $q \geqslant p$.

Заметим, что система (3.1) является дискретным аналогом системы

$$\begin{cases} x_i^{(p)} + \alpha_1^i x_i^{(p-1)} + \dots + \alpha_{p-1}^i \dot{x}_i + \alpha_p^i x_i = u_i \\ y_i^{(q)} + \beta_1^i y^{(q-1)} + \dots + \beta_{q-1}^i \dot{y}_i + \beta_q^i y_i = v. \end{cases}$$

Управления $u_i(k);\ i = 1, 2;\ v(k)$ удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| u_i(k) \right\|^2 \leqslant \rho_i^2; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left\| v(k) \right\|^2 \leqslant \sigma^2;\ i = 1, 2 \tag{3.2}$$

Будем говорить, что дискретная игра преследования (3. 1) — (3. 2) из начального состояния $z_j^i(0);\ j = \overline{1, p+q};\ i = 1, 2$, где $z_1^i(0) \neq z_{p+1}^i(0);\ i = 1, 2$ заканчивается за K шагов, если при любом допустимом управлении $v(k);\ k = \overline{0, K-1}$ можно построить управления $u_i(k),\ k = \overline{0, K-1}$

$$\sum_{k=0}^{K_1-1} \left\| u_i(k) \right\|^2 \leqslant \rho_i^2;\ i = 1, 2,$$

такие, что либо $z_1^1(K) = z_{p+1}^1(K)$ либо $z_1^2(K) = z_{p+1}^2(K)$.

Положим

$$z^i(k) = \left(z_1^i(k), z_2^i(k), \dots, z_{p+q}^i(k) \right)^T \in R^{(p+q)n};\ i = 1, 2.$$

Тогда систему (3. 1) можно написать в виде

$$z^i(k+1) = A_i z^i(k) - B_i u_i(k) + C_i v(k);\ i = 1, 2, \tag{3.3}$$

$$A_i = \left(\begin{array}{cccccccccccc}
E & \mu E & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} \\
\tilde{0} & E & \mu E & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} \\
\hdashline
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & E & \mu E & \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} \\
-\mu\alpha_p^i E & -\mu\alpha_{p-1}^i E & -\mu\alpha_{p-2}^i E & \cdots & -\mu\alpha_2^i E & (1-\mu\alpha_1^i)E & \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} \\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} & E & \mu E & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} \\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & E & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} \\
\hdashline
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & E & \mu E \\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \cdots & \tilde{0} & \tilde{0} & -\mu\beta_q^i E & -\mu\beta_{q-1}^i E & \cdots & -\mu\beta_2^i E & (1-\mu\beta_1^i)E
\end{array} \right) \tag{3,4}$$

$$B_i = \begin{Vmatrix} \widetilde{O} \\ \widetilde{O} \\ \vdots \\ \widetilde{O} \\ -\mu E \\ \widetilde{O} \\ \vdots \\ \widetilde{O} \end{Vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ p\text{ - ое место} \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad ; \quad C_i = \begin{Vmatrix} \widetilde{O} \\ \widetilde{O} \\ \vdots \\ \widetilde{O} \\ \mu E \end{Vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ (p+q)\text{ - ое место,} \end{array}$$

$i = 1, 2$, где E, $\widetilde{O}$ — соответственно единичная и нулевая матрицы порядка n.

ЛЕММА 4. *Пусть*

$$\begin{array}{l} x_{11}, x_{12}, \dots \\ x_{21}, x_{22}, \dots \\ \dots\dots\dots \\ x_{p1}, x_{p2}, \dots \\ y_{11}, y_{12}, \dots \\ y_{21}, y_{22}, \dots \\ \dots\dots\dots \\ y_{q1}, y_{q2}, \dots \end{array}$$

— $(p+q)$ *последовательности связаны соотношениями:*

$$\begin{aligned} & x_{11} = 1,\ x_{21} = \mu,\ x_{31} = x_{41} = \dots = x_{p1} = 0 \\ & x_{1n} = x_{1.n-1} - \mu\alpha_p x_{p.n-1} \\ & x_{2n} = \mu x_{1.n-1} + x_{2.n-1} - \mu\alpha_{p-1} x_{p.n-1} \\ & x_{3n} = \mu x_{2.n-1} + x_{3.n-1} - \mu\alpha_{p-2} x_{p.n-1} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & x_{p-1.n} = \mu x_{p-1.n-1} + (1 - \mu\alpha_1)\, x_{p.n-1} \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} & y_{11} = 1,\ y_{21} = \mu,\ y_{31} = y_{41} = \dots = y_{q1} = 0 \\ & y_{1n} = y_{1.n-1} - \mu\beta_q y_{q.n-1} \\ & y_{2n} = \mu y_{1.n-1} + y_{2.n-1} - \mu\beta_{q-1} y_{q.n-1} \\ & y_{3n} = \mu y_{2.n-1} + y_{3.n-1} - \mu\beta_{q-2} y_{q.n-1} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & y_{q-1.n} = \mu y_{q-2.n-1} + y_{q-1.n-1} - \mu\beta_2 y_{q.n-1} \\ & y_{qn} = \mu y_{q-1.n-1} + (1 - \mu\beta_1)\, y_{q.n-1}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $n = 2, 3, \dots$.

Пусть уравнение

$$\lambda^p + \alpha_1 \lambda^{p-1} + \alpha_2 \lambda^{p-2} + \dots + \alpha_{p-1}\lambda + \alpha_p = 0 \tag{3.7}$$

имеет различные действительные корни $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$, *а уравнение*

$$\gamma^q + \beta_1 \gamma^{q-1} + \beta_2 \gamma^{q-2} + \dots + \beta_{q-1}\gamma + \beta_q = 0 \qquad (3.8)$$

имеет различные действительные корни $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_q$.

Тогда

$$x_{pn} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{p-2} & (1+\mu\lambda_1)^n \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_1^{p-2} & (1+\mu\lambda_1)^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \lambda_p & \lambda_p^2 & \dots & \lambda_p^{p-2} & (1+\mu\lambda_p)^n \end{vmatrix}}{\prod\limits_{\substack{j>i \\ i,j=1}}^{p} (\lambda_j - \lambda_i)}\ ; n = 2,3, \dots \qquad (3.9)$$

$$y_{qn} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_1^2 & \dots & \gamma_1^{q-2} & (1+\mu\gamma_1)^n \\ 1 & \gamma_2 & \gamma_2^2 & \dots & \gamma_2^{q-2} & (1+\mu\gamma_2)^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \gamma_q & \gamma_q^2 & \dots & \gamma_q^{q-2} & (1+\mu\gamma_q)^n \end{vmatrix}}{\prod\limits_{\substack{j>i \\ i,j=1}}^{q} (\gamma_j - \gamma_i)}\ ; n = 2,3, \dots \qquad (3.10)$$

Доказательство. Из соотношения (3.6) имеем

$$\begin{aligned} & x_{1n} + \lambda x_{2n} + \lambda^2 x_{3n} + \dots + \lambda^{p-2} x_{p-1,n} + \lambda^{p-1} x_{pn} = \\ & = (1+\mu\lambda)x_{1,n-1} + \lambda(1+\mu\lambda)x_{2,n-1} + \dots + \lambda^{p-2}(1+\mu\lambda)x_{p-1,n-1} + \\ & + [-\mu\alpha_p\ \mu\lambda\alpha_{p-1} - \mu\lambda^2\alpha_{p-2} - \dots - \mu\lambda^{p-2}\alpha_2 + \lambda^{p-1}(1-\mu\alpha_1)]\, x_{p,n-1} = \\ & = (1+\mu\lambda)(x_{1,n-1} + \lambda x_{2,n-1} + \lambda^2 x_{3,n-1} + \dots + \lambda^{p-2} x_{p-1,n-1}) + \\ & + [-\mu\alpha_p - \mu\lambda\alpha_{p-1} - \mu\lambda^2\alpha_{p-2} - \dots - \mu\lambda^{p-2}\alpha_2 + \lambda^{p-1}(1-\mu\alpha_1)]x_{p,n-1} \end{aligned}$$

Возьмём λ так, чтобы имело место равенство

$$\lambda^p + \alpha_1\lambda^{p-1} + \alpha_2\lambda^{p-2} + \dots + \alpha_{p-1}\lambda + \alpha_p = 0.$$

При любых зналениях λ имеем

$$x_{1n} + \lambda x_{2n} + \lambda^2 x_{3n} + \dots + \lambda^{p-1} x_{pn} =$$

$$= (1+\mu\lambda)(x_{1,n-1} + \lambda x_{2,n-1} + \lambda^2 x_{3,n-1} + \dots + \lambda^{p-1} x_{p,n-1})$$

Отсюда следует, что

$$x_{1n} + \lambda x_{2n} + \dots + \lambda^{p-1} x_{pn} =$$

$$= (1+\mu\lambda)^{n-1} (x_{11} + \lambda x_{21} + \dots + \lambda^{p-1} x_{p1}) = (1 + \mu\lambda)^n.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} x_{1n} + \lambda_1 x_{2n} + \lambda_1^2 x_{3n} + \dots + \lambda_1^{p-1} x_{pn} = (1+\mu\lambda_1)^n \\ x_{1n} + \lambda_2 x_{2n} + \lambda_2^2 x_{3n} + \dots + \lambda_2^{p-1} x_{pn} = (1+\mu\lambda_2)^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{1n} + \lambda_p x_{2n} + \lambda_p^2 x_{3n} + \dots + \lambda_p^{p-1} x_{pn} = (1+\mu\lambda_p)^n \end{cases}$$

Так как $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$, то

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{p-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \lambda_p & \lambda_p^2 & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{j=i \\ i,j=1}}^{p} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0.$$

Используя теорему Крамера, получаем (3.9) и (3.10). Лемма доказана.

Введем в рассмотрение подпостранство M пространства $R^{(p+q)n}$

$$M = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_{p+q})^T : z_1 = z_{p+1}\}.$$

Тогда его ортогональное дополнение имеет вид

$$L = \{z = (z_1, \dots, z_{p+q})^T : z_1 = -z_{p+1};$$

$$z_2 = z_3 = \dots = z_p = z_{p+2} = \dots = z_{p+q} = 0\}.$$

В соответствуюищем базисе в L проекция Πz имеет простой вид

$$\Pi z = z_1 - z_{p+1}, \text{ где}$$

$$\Pi = (E, \tilde{O}, \dots, \tilde{O}, \underset{\substack{\downarrow \\ (p+1)\text{-е место}}}{-E}, \tilde{O}, \dots, \tilde{O})$$

есть $n \times (p+q)n$-матрица, соответствующая оператору проектирования в выбранных базисах.

Очевидно, что

$$A_i^k = \begin{vmatrix} x_{1k}^i E & x_{2k}^i E & \dots & x_{pk}^i E & \widetilde{O} & \widetilde{O} & \dots & \widetilde{O} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \widetilde{O} & \widetilde{O} & \dots & \widetilde{O} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \widetilde{O} & \widetilde{O} & \dots & \widetilde{O} \\ \widetilde{O} & \widetilde{O} & \dots & \widetilde{O} & y_{1k}^i E & y_{2k}^i E & \dots & y_{qk}^i E \\ \widetilde{O} & \widetilde{O} & \dots & \widetilde{O} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \widetilde{O} & \widetilde{O} & \dots & \widetilde{O} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

$i = 1, 2$; $k = 2, 3 \dots$, где E, $\widetilde{O}$ — соответственно единичная и нулевая матрицы порядка n, и

$$x_{j1}^i,\ x_{j2}^i,\ \dots,\ x_{jk}^i, \dots;\ j = \overline{1, p}$$

$$y_{j1}^i,\ y_{j2}^i,\ \dots,\ y_{jk}^i, \dots;\ j = \overline{1, q},$$

$i = 1, 2$, — $(p+q)$ последовательности связаны соотношениями типов (3.5) и (3.6). Имеем

$$\Pi A_i^k C_i = -\mu y_{qk}^i E;\ \Pi A_i^o C_i = \widetilde{O};\ k = 1, 2, \dots;\ i = 1, 2,$$

$$\Pi A_i^k B_i F_i(k) = -\mu x_{pk}^i F_i(k) E;\ \Pi A_i^o B_i F_i(0) = \widetilde{O};\ k = 1, 2, \dots;\ i = 1, 2.$$

Положим

$$F_i(k) = \begin{cases} \widetilde{O}, & \text{если } k = 0 \\ \dfrac{y_{qk}^i}{x_{pk}^i} E, & \text{если } k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$i = 1, 2$. Отсюда следует, что при всех $k = 0, 1, \dots$ имеем

$$\Pi A_i^k B_i F_i(k) = \Pi A_i^k C_i;\ i = 1, 2.$$

ЛЕММА 5. *При всех $\varepsilon > 0$ и всех $z^i(0) = (z_1^i(0), \dots, z_{p+q}^i(0))^T$; $i = 1, 2$, существуют положительные целые числа K_i; $i = 1, 2$ и векторы $\omega_i(0), \omega_i(1), \dots, \omega_i(K_i)$ такие, что*

а) $$\sum_{k=0}^{K_i} \| \omega_i(k) \|^2 \leqslant \omega^2;\ i = 1, 2,$$

б) $$\Pi A_i^{K_i+1} z^i(0) - \sum_{k=0}^{K_i} \Pi A_i^{K_i-k} B_i \omega_i(k) = 0;\ i = 1, 2;$$

если уравнения:

$$\lambda^p + \alpha_1^i \lambda^{p-1} + \alpha_2^i \lambda^{p-2} + \ldots + \alpha_{p-1}^i \lambda + \alpha_p^i = 0 \qquad (3.11)$$

имеют рнзличные корни $\lambda_1^i < \lambda_2^i < \ldots < \lambda_p^i$; $i = 1, 2$, *а уравнения*

$$\gamma^q + \beta_1^i \gamma^{q-1} + \beta_2^i \gamma^{q-2} + \ldots + \beta_{q-1}^i \gamma + \beta_q^i = 0 \qquad (3.12)$$

имеют различные корни $\gamma_1^i < \gamma_2^i < \ldots < \gamma_b^i$; $i = 1, 2$

и выполнены условия $\gamma_q^i \leqslant \lambda_p^i \leqslant 0$; $i = 1, 2$.

Доказательство аналогично доказательстку леммы 2.

В силу того, что $\gamma_q^i \leqslant \lambda_p^i \leqslant 0$; $i = 1, 2$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{qn}^i}{x_{pn}^i} = \begin{cases} 0 & , \text{если } \gamma_q^i < \lambda_p^i \\ \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{p-1}\left(\lambda_p^i - \lambda_k^i\right)}{\prod\limits_{k=1}^{q-1}\left(\gamma_q^i - \gamma_k^i\right)} & , \text{если } \gamma_q^i = \lambda_p^i;\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что существуют конечные числа δ_i; $i = 1, 2$; такие, что

$$\delta_i^2 = \max_k \left\{ \frac{\prod\limits_{\substack{j>i \\ i,j=1}}^{p}\left(\lambda_j^i - \lambda_i^i\right) \begin{vmatrix} 1 & \gamma_1^i & \ldots & \left(\gamma_1^i\right)^{q-2} & \left(1+\mu\gamma_1^i\right)^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \gamma_q^i & \ldots & \left(\gamma_1^i\right)^{q-2} & \left(1+\mu\gamma_q^i\right)^k \end{vmatrix}}{\prod\limits_{\substack{j>i \\ i,j=1}}^{q}\left(\gamma_j^i - \gamma_i^i\right) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1^i & \ldots & \left(\lambda_1^i\right)^{p-2} & \left(1+\mu\lambda_1^i\right)^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_p^i & \ldots & \left(\lambda_p^i\right)^{p-2} & \left(1+\mu\lambda_p^i\right)^k \end{vmatrix}} \right\}^2$$

Тогда имеем

$$\sum_{k=0}^{K_i} \| F_i(k)\, v(K_i - k) \|^2 \leqslant \delta_i^2 \sum_{i=0}^{K_i} \| v(k) \|^2. \qquad (3.13)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть уравнения (3.11) *имеют различные действинельные корни* $\lambda_1^i < \lambda_2^i < \ldots < \lambda_p^i$; $i = 1, 2$, *а уравнения* (3.12) *имеют различные действительные корни* $\gamma_1^i < \gamma_2^i < \ldots < \gamma_q^i$; $i = 1, 2$, *где* $\gamma_q^i \leqslant \lambda_p^i \leqslant 0$; $i = 1, 2$. *Пусть выполнено условие*

$$\frac{\rho_1^2}{\delta_1^2} + \frac{\rho_2^2}{\delta_2^2} > \sigma^2.$$

Тогда преследование в дискретной игре многих лиц (3.1) — (3.2) *из любой начальной точки заканчивается за конечное число шагов.*

Доказательство аналогично доказательству теорем 1 и 2.

Авторы благодарят Данг Хыу Дао за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.С. Понтрягин, *О линейных дифференциальных играх* — I, ДАН СССР, 174 (1967), 1278 — 1280.
2. Н.Ю. Сатимов, *О двух методах преследования в линейных дискретных играх*, ДАН УзССР, 35 (1979), 3–4.
3. Фан Зуй Хай и А.Я. Азимов, *О линейных дискретных играх с ресурными ограничениями на управления*, ДАН АзССР, 37 (1981), 7–10.
4. Фтн Зуй Хай, *Задачи преследования в линейных дискретных играх с общими типами информации*, ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA, 9 (1964), 69–103.
5. Н.Ю. Сатимов, В.В. Рихсиев и А.А. Хамдамов, *О задаче преследования для линейных дифференциальных и дискретных игр многих лиц с интегральными ограничениями*, Мат. сборник, новая серия, № 118 (160), 4(8), 1982, 38–50.
6. Фан ЗУй Хай, *О задаче преследования несколькими обьектами в линейных дискретных играх*, ДАН АзССР, 39(1983), 10—14.
7. А.А. Хамдамов, *Задача преследования для одного класса дискретных игр многих лиц интегральными ограничениями*, «ВИНИТИ», 3802–82, деп, 1982, (1 —18)
8. Фан Зуй Хай, *О некоторых классах линейных дискретных игр с геометрическими ограничениями на управления*, «ВИНИТИ», № 4177—80, деп, 1980, 1–22.

Поступила в редакцию 29 июня 1985 г.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ХАНОЙ, ВЬЕТНАМ.