ACTA MATHEMATICA VIETNAMICA
Vol. 8 No. 2 (1983)

QUELQUES ASPECTS TOPOLOGIQUES EN ANALYSE HARMONIQUE

DÔ NGOC ZIÊP

Institut de Mathématiques
Hanoi

INTRODUCTION

Nous començons par le problème suivant de l'analyse harmonique classique. Soit $L^1(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions absolument intégrables sur les corps de nombres réels $\mathbf{R}$. Il s'agit bien sûr d'un espace de Banach.

Les opérations :

— convolution : $(f*g)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y)\, g(x-y)\, dy$

— et involution : $f \mapsto f^*$

$$f^*(x) \overset{\text{def}}{=} \overline{f(-x)}$$

transforment $L^1(\mathbf{R})$ en une algèbre de Banach involutive. Malgré l'utilité de la convolution, cette opération éclipse la clarté de la structure de l'algèbre $L^1(\mathbf{R})$ et puis le problème de la description des idéaux maximaux de $L^1(\mathbf{R})$ n'est pas trivial.

C'est bien la transformation de Fourier qui nous donne un outil efficace pour résoudre le problème : transformant la convolution en produit ponctuel, les fonctions absolument intégrables $f \in L^1(\mathbf{R})$ en fonctions continues nulles à l'infini $\widehat{f} \in C_0(\mathbf{R})$,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \exp(ix\xi)(x)\, dx,$$

la transformation de Fourier établit un isomorphisme entre les algèbres de Banach $C^*(L^1(\mathbf{R}))$ et $C_o(\mathbf{R})$; et puis l'espace des idéaux maximaux de $L^1(\mathbf{R})$ est justement l'espace des valeurs de la variable ξ.

Un des problèmes typiques de l'analyse harmonique sur les groupes localement compacts G consiste à étudier la structure de l'algèbre de Banach involutive $L^1(G)$ des fonctions absolument intégrables relativement à la mesure de Haar fixée, ou, c'est « la même chose », étudier la structure de la C^*-algèbre $C^*(G)$ du groupe G, voir par exemple J. Dixmier [1]. L'importance essentielle du problème peut être expliquée par beaucoup de choses. Tout d'abord, la plus grande partie des théorèmes généraux de la théorie des représentations unitaires du groupe G est démontrée par les théorèmes correspondants de celle de l'algèbre $C^*(G)$. Deuxièmement, les C^*-algèbres $C^*(G)$ sont les exemples typiques de la théorie générale des C^*-algèbres, par lesquels aujourd'hui les physiciens font les modèles des phénomènes de physique quantique et la mécanique statistique (voir. G. Emch [1]). Donc, la description totale de la structure des C^*-algèbres est *un problème de la géométrie algébrique non commutative, et même des applications à la physique, ou à la théorie des probabilités, etc...*

Depuis longtemps, on a étudié le problème de la description de la structure des C^*-algèbres. On connait une méthode efficace pour le faire, consistant à résoudre deux sous-problèmes :

1. Chercher toutes les fonctions de type $\exp(i\,\xi\,x) = U_\xi(x)$.

2. Etudier l'image totale de $L^1(G)$ dans la transformation de Fourier (non commutative) abstraite $\widehat{f}(\xi) = \int_G U_\xi(x) f(x)\, dx$

Cependant, pour les exemples non triviaux, les résultats obtenus sont tantôt très discrets, tantôt très mauvais. Par exemple, depuis 1962 jusqu'à ces derniers temps, les groupes localement compacts, non compacts, dont les C^*-algèbres peuvent être décrites sont SL $(2, \mathbf{C})$, par J. M. G. Fell [3], Aff $\mathbf{R}$ par D. N. Ziêp [1], groupe de Heisenberg par G. G. Kasparov [3], et les séries des exemples de ces types, voir par exemple J. Rosenberg [1, 2] et aussi Appendice B.

Dans ce travail, nous exposerons quelques résultats concernant les deux problèmes indiqués plus haut. En étudiant le premier problème, nous proposons une *construction générale* des représentations holomorphiquement induites partiellement invariantes (HIPI). Cette construction est une généralisation naturelle de la construction des représentations holomorphiquement induites de R. Blattner [1] $\mathrm{Ind}_D^G \widetilde{\sigma}$, quand on peut agrandir en même temps le sous-groupe D et sa représentation $\widetilde{\sigma}$. C'est ce que nous allons faire dans le chapitre I.

Dans le chapitre II, nous considérons le problème de la *quantification* des systèmes classiques avec action plate de notre groupe G. Nous aurons ainsi une construction « physique » des représentations HIPI.

Alors nous pouvons faire ensemble les deux constructions pour obtenir une *méthode des K-orbites généralisée.* Au paragraphe III. 3., nous montrerons des exemples non-triviaux de notre méthode des K-orbites généralisées.

Dans le chapitre IV, nous montrerons que toutes les représentations irréductibles de dimensions fonctionnelles finies dues à A. Kirillov des groupes de difféomorphismes *peuvent être obtenues par notre méthode.* Cependant elles ne sont pas obtenues par la méthode des K-orbites habituelle de A.Kirillov — B.Kostant, comme cela a été remarqué par A. Kirillov [3].

Pour résoudre le deuxième problème, l'auteur a commencé à étudier la situation générale d'une C^*-algèbre postliminaire. L'auteur a suggéré de construire une *théorie des indices* des C^*-algèbres postliminaires, en appliquant la K-théorie homologique. Nous exposerons ces résultats dans l'Appendice A (≡ chapitre V).

Dans notre théorie des indices des C^*-algèbres postliminaires, les *idéaux de type compact* jouent un rôle fondamental. Dans le chapitre V, nous les décrirons en termes de la topologie du dual $\widehat{A}$ de A. Dans le chapitre VI, nous démontrerons quelques *critères efficaces de compacité* pour les C^*-algèbres des groupes localement compacts et les représentations irréductibles induites par des représentations liminaires des sous-groupes invariants. La situation est justement appliquée aux groupes de Lie résolubles connexes et simplement connexes, voir §VI. 2.

Enfin, dans le chapitre VII, nous exposerons *l'ensemble des exemples connus.* Dans ces cas, notre indice est réduit à *l'indice topoplogique* Index $C^*(G)$ de la C^*-algèbre du groupe. Le paragraphe VII. 1. se présente comme l'Appendice B, où nous exposerons les résultats communs de l'auteur et de V. M. Son et H. H. Viet.

Chaque chapitre sera commencé par une petite introduction propre.

Les références aux autres paragraphes seront notées par trois nombres : chapitre, paragraphe et subdivision ; par exemple §. III. 2.1. signifie Chapitre III, paragraphe 2, subdivision 1 ; Théorème II. 4.5 signifie le Théorème du § II. 4.5, etc,..

Schéma de l'interdépendance des chapitres

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr] & & \mathrm{II} \arrow[dl] & \mathrm{V} \arrow[ddl] \\
& \mathrm{III} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\mathrm{IV} & & \mathrm{VI} \arrow[d] & \\
& & \mathrm{VII} &
\end{tikzcd}$$

L'auteur tient à exprimer sa reconnaissance à Monsieur le Professeur Pierre Cartier (École polytechnique de Paris), dont les nombreuses idées et conseils lui ont permis d'améliorer ce travail.

I. REPRÉSENTATIONS HOLOMORPHIQUEMENT INDUITES PARTIELLEMENT INVARIANTES

Soient G un groupe localement compact, $X = D\backslash G$ un espace homogène (à droite) de G. En remarquant que l'espace des sections d'un fibré $\mathcal{E}_\sigma$ associé à une représentation σ d'un sous-groupe fermé H contenant D peut être inclus dans l'espace des sections du fibré $\mathcal{E}_{\sigma|D}$ associé à la restriction $\sigma|D$ de σ au sous-groupe fermé D par un système d'équations, nous pouvons refaire la construction des représentations induites au sens de G.W. Mackey [1], ou plus généralement des représentations holomorphiquement induites au sens de R. Blattner [1]. Dans ce chapitre, nous exposons ce formalisme pour obtenir une construction assez générale de représentations unitaires, qui sont nécessaires dans les chapitres II, III.

Nous introduirons dans §I. 1 une notion nouvelle de *polarisation*. Les D-polarisations au sens de L. Auslander et B. Kostant [1, §I. 1] sont des extensions H du sous-groupe D, $H \supset D$, pour lesquelles une représentation irréductible fixée $\tilde{\sigma}$ de D reste encore une représentation irréductible de H. Nos $(D, \hat{\sigma})$-polarisations sont en même temps des couples d'extensions H du sous-groupe D et des extensions irréductibles σ de la représentation $\tilde{\sigma}$, $\sigma|_D \cong \widetilde{\sigma}$. Nous remarquons ainsi que l'irréductibilité de $\tilde{\sigma}$ est inessentielle pourvu que les σ

soient irréductibles. Donc on peut induire par les représentations réductibles, en particulier par les représentations factorielles pour obtenir les représentations irréductibles.

Dans les paragraphes suivants, nous faisons des choses analogues aux classiques : unitarisation (§I. 2), et L^2-cohomologies (§I. 3).

Les résultats ont été énoncés dans D.N. Ziêp [5], [8], [10].

I. 1. POLARISATIONS D'UN ESPACE HOMOGÈNE ET REPRÉSENTATION HOLOMORPHIQUEMENT INDUITES PARTIELLEMENT INVARIANTES.

Soient G un groupe de Lie connexe, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie, $\mathcal{G}_{\mathbf{C}}$ le complexifié de $\mathcal{G}$. Pour un élément $Z = X + iY$ de $\mathcal{G}_{\mathbf{C}}$, nous désignerons son élément conjugué par $\overline{Z} = X - iY$. Si $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{G}_{\mathbf{C}}$, nous poserons $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{Z}\,;\, Z \in \mathcal{A}\}$. Soient D un sous-groupe fermé (non nécessairement connexe) de G, d'algèbre de Lie δ, $X = D \backslash G$ l'espace homogène à droite, $\widetilde{\sigma}$ une représentation unitaire fixée de D dans un espace hilbertien $\widetilde{V}$.

I.1.1 DÉFINITION. *Nous disons que* $(\mathcal{P}, H, \rho, \sigma)$ *est une* (D, σ)-polarisation, *si*

(a) $\mathcal{P}$ *est une sous-algèbre de Lie complexe de* $\mathcal{G}_{\mathbf{C}}$, *contenant* δ.

(b) La sous-algèbre de Lie $\mathcal{P}$ *est invariante par tous les opérateurs* $Ad_{\mathcal{G}_{\mathbf{C}}} x$, $x \in D$.

(c) H *est un sous-groupe fermé de* G, *d'algèbre de Lie* $\mathcal{H} = \mathcal{P} \cap \mathcal{G}$, *contenant* D.

(d) Il existe un sous-groupe fermé M *de* G, *contenant* H, *d'algèbre de Lie* $\mathcal{M} = (\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}) \cup \mathcal{G}$.

(e) σ *est une représentation unitaire irréductible de* H *dans un espace hilbertien* V *telle que* $\sigma|_{\mathbf{D}}$ *soit un multiple de* $\widetilde{\sigma}$.

(f) ρ *est une représentation d'algèbre de Lie complexe* $\mathcal{P}$ *dans le même* V, *qui satisfait à toutes les conditions de E. Nelson (voir, par exemple, A. Kirillov [1, §6. 5]), telle que la restriction de* ρ *à* $\mathcal{H}$ *soit équivalente à la différentielle* $d\sigma$ *de la représentation* σ.

I. 1. 2. Remarque. *Si* $(\mathcal{P}, H, \rho, \sigma)$ *est une* (D, σ)*-polarisation, alors* $\mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} = \mathcal{H}_{\mathbf{C}}$ $\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}} = \mathcal{M}_{\mathbf{C}}$.

En effet, d'après la définition I. 1. 1, nous avons

$$\mathcal{H}_{\mathbf{C}} = \mathcal{H} + i\mathcal{H} = \mathcal{P} \cap \mathcal{G} + i\mathcal{P} \cap \mathcal{G} \subset \mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}},$$

$$\mathcal{M}_{\mathbf{C}} = \mathcal{M} + i\mathcal{M} = (\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}) \cap \mathcal{G} + i(\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}) \cap \mathcal{G} \subset \mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}.$$

Inversement, supposons que $Z = X + iY$. Si $Z \in \mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}}$ alors $\overline{Z} \in \mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}}$.

Donc, on a $X = \frac{1}{2}(Z + \overline{Z}) \in \mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap \mathcal{G} \subset \mathcal{H}$,

$$Y = \frac{1}{2i}(Z - \overline{Z}) \in \mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap \mathcal{G} \subset \mathcal{H},$$

et nous avons $Z \in \mathcal{H}_{\mathbf{C}}$, $\mathcal{H}_{\mathbf{C}} = \mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}}$. D'après un raisonnement analogue, nous avons aussi $\mathcal{M}_{\mathbf{C}} = \mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}$

I.1.3. DÉFINITION. *Nous disons qu'une variété de classe C^∞ est une* variété mixte *de type (k, l, m), si elle est un fibré de classe C^∞ dont la base est une variété mixte de type (k, l) au sens de R. Blattner [1] et les fibres sont des variétés réelles de classe C^∞ de dimension m.*

I.1.4. PROPOSITION. *Soit $(\mathcal{P}, H, \rho, \sigma)$ une $(D, \tilde{\sigma})$-polarisation de l'espace homogène $X = D\backslash G$. Alors sur X il existe une structure de variété mixte de type (k, l, m), où*

$$k = \dim G - \dim M$$

$$l = \frac{1}{2}(\dim M - \dim H)$$

$$m = \dim H - \dim D$$

Démonstration. On note par X (resp., par Y, Z) l'espace homogène $X = D\backslash G$ (resp., $Y = G\backslash H$, $Z = D\backslash H$). On a les fibrés localement triviaux

$$\begin{array}{ccc} D \to G & D \to H & H \to G \\ \downarrow p & \downarrow q & \downarrow r \\ X & Z & Y \end{array}$$

et par suite X apparait comme un espace quotient de Y.

Donc nous pouvons pour chaque point y de Y trouver un voisinage $U = U(y)$ tel que $r^{-1}(U) \approx H \times U$; et puis pour chaque point Z de $Z = D\backslash H$ un voisinage $V = V(z)$ tel que $q^{-1}(V) \approx D \times V$. Donc, pour chaque élément $X = (z, y)$ de X on peut choisir un voisinage $W = U \times V$ pour lequel $p^{-1}(W) \approx D \times W$.

D'après la première assertion de théorème 1 du §13.4 de A.Kirillov [1], Y est une variété mixte de type (k, l) au sens de Blattner, où $k = \dim G - \dim M$,

$l = \frac{1}{2}(\dim M - \dim H)$. En particulier nous associons à U une telle structure. Par conséquent, X est une variété mixte de type (k, l, m) au sens de la Définition I.1.3.

I.1.5. Soient $\mathcal{E}$ un fibré localement trivial en espaces hilbertiens sur X, ∇ une connexion *conservant la structure hilbertienne* sur les fibres, c'est-à-dire si γ est une courbe joignant les points x et x' de X, le transport parallèle le long du chemin γ est un isomorphisme de la fibre $\mathcal{E}_x$ sur la fibre $\mathcal{E}_{x'}$, qui conserve le produit scalaire. Dans ce cas, nous pouvons, comme toujours, définir la dérivée covariante ∇_ξ, pour chaque champ de vecteurs $\xi \in \mathrm{Vect}(X)$, dans l'espace des sections lisses de $\mathcal{E}$.

I.1.6. DÉFINITION. Soient $\begin{array}{c} Z \to X \\ \downarrow \\ Y \end{array}$ une variété mixte de type (k, l, m), $(\mathcal{E}, \nabla)$ un fibré en espaces hilbertiens à connexion ∇ conservant la structure hilbertienne sur les fibres. Nous disons qu'une section lisse s du fibré $\mathcal{E}$ est *partiellement holomorphe-partiellement invariante* (p.h.p.i), si elle a une dérivée covariante nulle suivant les champs de vecteurs tangents aux fibres et les champs de vecteurs antiholomorphes de la structure mixte.

I.1.7. THÉORÈME. *Soit* $(\mathcal{P}, \mathrm{H}, \rho, \sigma)$ *une* $(\mathrm{D}, \tilde{\sigma})$*-polarisation fixée de l'espace* $D = X \setminus G$. *Alors sur le G-fibré* $\mathcal{E}_{\sigma|D} = G \underset{D}{\times} V$ *associé à la représentation* $\sigma|D$, *il existe une connexion* ∇ *(et donc, une structure de G-fibré partiellement holomorphe partiellement invariant* $\mathcal{E}_{\sigma,\rho})$, *telle que la représentation naturelle, dite représentation holomorphiquement induite partiellement invariante (représentation* HIPI) *et notée par* $\mathrm{Ind}\,(\mathrm{G}; \mathcal{P}, \mathrm{H}, \rho, \sigma)$, *du groupe* G *dans l'espace des sections p.h.p.i. soit équivalente à la représentation par les translations à droite de même groupe dans l'espace* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{G}; \mathcal{P}, \mathrm{H}, \rho, \sigma)$ *des fonctions de classe* C^∞ *sur* G *à valeurs dans* V *qui satisfont au système d'équations suivant :*

$\mathrm{f(hx)} = \sigma(\mathrm{h})\mathrm{f(x)}$, *pour chaque* h *de* H *et* x *de* G, $\mathrm{L_X f} + \rho(\mathrm{X})\mathrm{f} = 0$, *pour chaque* X *de* $\mathcal{P}$, *où* $\mathrm{L_X}$ *est la dérivée de Lie à gauche par le champ de vecteurs* ξ_X *sur* G *correspondant à* X.

I.1.8. **Démonstration.** Nous devons seulement construire une connexion affine sur le fibré $\mathcal{E}_{\sigma|D}$ telle que l'espace des sections p.h.p.i. de $\mathcal{E}_{\sigma|D}$ soit isomorphe à l'espace $C^\infty(G; \mathcal{P}, H, \rho, \sigma)$.

Il est clair que les sections du fibré $\mathscr{E}_{\sigma|D}$ peuvent être identifiées aux fonctions sur G à valeurs dans V satisfaisant au système d'équations

$$f(hx) = \sigma(h)f(x), \quad h \in D, \quad x \in G$$

Alors on a bien $C^\infty(G\,; \mathcal{P}, H, \rho, \sigma) \hookrightarrow \Gamma(\mathscr{E}_{\sigma|D})$ comme un sous-espace vectoriel.

LEMME 1. *Le sous-espace* $C^\infty(G\,; \mathcal{P}, H, \rho, \sigma)$ *est invariant sous l'action de* G *par les translations à droite.*

En effet, la fonction f appartient à $C^\infty(G\,; \mathcal{P}, H, \rho, \sigma)$ si, et seulement si, elle satisfait au système d'équations.

$$f(hx) = \sigma(h)f(x),\ h \in H,\ x \in G$$
$$L_X f + \rho(X)f = 0,\ X \in \mathcal{P}$$

où L_X est la dérivée de Lie à gauche correspondant à X

$L_X f(x) \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\exp(-tX)x)$, pour $X \in \mathcal{G}$ et par linéarité pour $X \in \mathcal{G}_C$.

Remarque. Si H est connexe, la première équation peut être déduite de la deuxième.

On voit que la fonction f satisfait au système d'équations ci-dessus si, et seulement si, pour chaque g de G la fonction f_g, définie par $f_g(x) = f(xg)$, satisfait au même système d'équations. Le lemme est prouvé.

LEMME 2. *L'espace* $C^\infty(G\,; \mathcal{P}, H, \rho, \sigma)$ *est isomorphe à l'espace des sections partiellement holomorphes au sens de Blattner du fibré* $\mathscr{E}_\sigma$ *associé à la représentation* σ *du sous-groupe* H.

D'après la définition d'une $(D, \tilde{\sigma})$-polarisation, il est facile de vérifier que $H\backslash G$ a une structure de variété mixte de type (k, l). La vérification du lemme est une modification de celle de A.Kirillov [1], Th. 1 de §13.4 dans le cas d'un fibré en espaces hilbertiens.

Revenons enfin à la démonstration du théorème. D'après le Lemme 2, nous avons une connexion affine du fibré $\mathscr{E}_\sigma$, $\widetilde{\nabla}$, associée à l'opérateur différentiel (voir aussi § II.4.6 ci-dessous) $L_X + \rho(X)$, $X \in \mathcal{P}$
en fixant une connexion du fibré principal $\begin{array}{c} H \to G \\ \downarrow \\ Y \end{array}$. Considérons maintenant la

projection canonique $X \xrightarrow{\pi} Y$ Alors sur X, il existe une connection induite $\pi^* \nabla = \tilde{\nabla}$ (voir par exemple R. Sulanke, P. Wintgen [1]). Il est assez simple de vérifier que $\tilde{\nabla}$ est bien la connexion nécessaire. La démonstration du théorème est achevée.

I. 2. UNITARISATION

Nous avons eu dans le paragraphe précédent un faisceau de sections lisses partiellement holomorphes, partiellement invariantes. Pour obtenir une représentation unitaire dans l'espace de telles sections nous devons seulement appliquer le procédé d'unitarisation. Le lecteur peut consulter l'article de A.Kirillov [2] pour les détails. On suppose σ unitaire.

I.2.1. Supposons que Δ_G (respectivement, Δ_H) soit la fonction modulaire du groupe G (resp, du groupe H), $\delta^2 = \Delta_H/\Delta_G$ soit le caractère non unitaire de H. Nous considérons le G-fibré $\mathcal{M} = G \times C$, associé au caractère non unitaire $\sigma^2 |_D$ du sous-groupe D. Nous notons $\mathcal{M}^{1/2}$ le G-fibré associé au caractère $\delta|_D = (\Delta_H / \Delta_G)^{1/2}|_D$. Donc le fibré $\mathcal{E}_{\sigma,\rho} \otimes \mathcal{M}^{1/2}$ est un G-fibré sur $X = D\backslash G$. Soit s une section du fibré $\mathcal{E}_{\sigma,\rho} = \mathcal{E}_{\sigma,\rho} \otimes \mathcal{M}^{1/2}$, alors $\| s \|^2_V$ est une section du fibré $\mathcal{M}$. De plus, $\| s \|^2_V$ est une fonction qui est invariante sur chaque classe quotient de $H\backslash G$. Alors on peut prendre le produit scalaire des deux sections comme.

$$(s_1, s_2) = \int_{H\backslash G} (s_1(x), s_2(x))_V \, dx$$

I.2.2. Notons par $L^2(G; \mathcal{P}, H, \rho, \sigma)$ l'espace hilbertien qui est obtenu par complétion de l'espace des sections partiellement holomorphes partiellement invariantes de carrés intégrables (p.h.p.i.c.i.), c'est-à-dire l'espace des fonctions sur G à valeurs dans V satisfaisant aux conditions suivantes

$$f(hx) = \sigma(h) \sqrt{\Delta_H(h)/\Delta_G(h)}\; f(x),\ h \in H, x \in G$$

$$L_X f + (\rho(X) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathcal{G}/\mathcal{H}} \operatorname{ad} X) f = 0,\ X \in \mathcal{P}$$

$$\int_{H\backslash G} \| f \|^2_V dx < \infty$$

La représentation naturelle du groupe G dans l'espace $L^2(G; \mathcal{P}, H, \rho, \sigma)$ est unitaire. Nous l'appelons représentation holomorphiquement induite partiellement invariante et nous la désignons par Ind $(G; p, H, \rho, \sigma)$.

I.3. REPRÉSENTATIONS HIPI DANS LES L^2-COHOMOLOGIES

Ayant un faisceau des sections p.h.p.i. du fibré $\mathcal{E}_{\sigma,\,\rho}$, nous pouvons aussi fabriquer les autres représentations unitaires dans les L^2 - cohomologies correspondantes. Nous exposons ceci d'après le travail, cité plus haut, de A.Kirillov [2].

I.3.1. Désignons par $\mathcal{F}$ le faisceau des germes de sections p.h.p.i. du fibré $\mathcal{E}_{\sigma,\,\rho}$ sur la variété $X = D\backslash G$, par $\mathcal{F}^q$ le faisceau des formes différentielles de type (o, q), sur X à valeurs dans le fibré $\mathcal{E}_{\sigma,\,\rho}$. Ici, nous appelons une *forme de type* (o, q), $q = 0, 1, 2,\ldots$, chaque expression du type.

$\Sigma\Phi_{i_l \ldots i_q}(y, \xi, z)\, d\bar{\xi}^{i_l} \wedge \ldots \wedge d\bar{\xi}^{i_q}$, où (y, ξ) sont les coordonnées locales de la base $Y = H\backslash G$, ξ étant les coordonnées complexes de $H\backslash M$, z les coordonnées dans dans les fibres, $\Phi_{i_l \ldots i_q}$ sont des fonctions qui forment ensemble sections p.h.p.i. du fibré $\mathcal{E}_{\sigma,\,\rho}$.

I.3.2. Nous avons bien sûr une suite exacte de faisceaux

$0 \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}^0 \to \mathfrak{F}^l \to \ldots \to \mathfrak{F}^l \to 0$, où l'application $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}^0$ est induite par inclusion des sections p.h.p.i. dans l'espace des sections lisses du faisceau $\mathcal{F}^0$, les autres applications sont induites par l'opérateur de la structure complexe sur $H\backslash M \subset H\backslash G$, appliquant chaque forme de type (o, q) sur une forme de type $(0, q+1)$.

Nous avons ainsi une suite exacte d'espaces linéaires de formes différentielles à coefficients p.h.p.i.

$0 \to \Gamma(\mathfrak{F}^0) \to \Gamma(\mathfrak{F}^l) \to \ldots \to \Gamma(\mathfrak{F}^l) \to 0$,

dont les cohomologies sont identifiées aux cohomologies du faisceau $\mathfrak{F}$ (Une modification du théorème de Dolbeault), $H^q(D\backslash G\,;\, \mathfrak{F})$.

I.3.2. L'espace des formes de type (o, q) sur X est isomorphe au sous-espace $C^q(\mathcal{P}; H;\, C^\infty(G) \otimes V)$ dans le produit tensoriel $C^\infty(G) \otimes \Lambda^q(\mathcal{P}\mathcal{H}_C)^* \otimes V$. Ce sous-espace se conpose des éléments H-invariants. Si le sous-groupe H est connexe, on peut remplacer la H-invariance par la $\mathcal{H}$-invariance (ou, de même, $\mathcal{H}_C$-invariance).

L'espace obtenu de cette manière est justement l'espace $C^q(\mathcal{P}, \mathcal{H}_C; C^\infty(G) \otimes V)$ des cocycles relatifs q-dimensionnels de l'algèbre et la sous-algèbre $\mathcal{H}_C$. Donc les cohomologies $H^q(D\backslash G;\, \mathfrak{F})$ peuvent être identifiées aux cohomologies $H^q(\mathfrak{P}, H;\, C^\infty(G) \otimes V$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{P}$.

1. 3. 3. Supposons qu'il existe une structure hermitienne H-invariante sur $\mathcal{P}/\mathcal{H}_c$. Alors il existe aussi une structure hermitienne induite sur $\Lambda^q(\mathcal{P}/\mathcal{H}_c)^*$. Nous désignerons par σ^q la représentation unitaire du groupe H dans $\Lambda^q(\mathcal{P}/\mathcal{H}_c)^*$. Alors l'espace $C^q(\mathcal{P}, H; C^\infty(G) \otimes V)$ peut être interprété comme l'espace $\Gamma(\mathcal{E}_{\sigma^q \otimes \sigma, \rho})$ des sections p.h.p.i. du G-fibré $\mathcal{E}_{\sigma^q \otimes \sigma, \rho}$, associé à la représentation unitaire $\sigma^q \otimes \sigma$ du sous-groupe $\mathcal{H}$.

1. 3. 4. Enfin nous appliquons le procédé de l'unitarisation du paragraphe 1.2. pour obtenir les représentations unitaires correspondantes.

Notons par $L^2(\widetilde{\mathcal{E}}_{\sigma_q \otimes \sigma, \rho})$ le complété de l'espace des sections p.h.p.i. de carré intégrable relativement au produit scalaire correspondant (voir § I. 2. 1.).

Nous avons un complexe d'espaces hilbertiens $L^2(\widetilde{\mathcal{E}}_{\sigma^q \otimes \sigma, \rho})$

$$0 \to L^2(\widetilde{\mathcal{E}}_{\sigma, \rho}) \xrightarrow{d_1} L^2(\widetilde{\mathcal{E}}_{\sigma^1 \otimes \sigma, \rho}) \xrightarrow{d_2} \dots \to L^2(\widetilde{\mathcal{E}}_{\sigma^l \otimes \sigma, \rho}) \to 0$$

Alors le complément orthogonal de Im (d_k) dans Ker (d_{k+1}) est un espace hilbertien dans lequel il existe une représentation unitaire du groupe G. Nous l'appelons *représentation HIPI dans les L^2-Cohomologies* et nous la désignons par

$$(L^2\text{-Coh}_k) \operatorname{Ind}(G; \mathcal{P}, H, \rho, \sigma)$$
$$k = 0, 1, 2, \dots, l$$

II. QUANTIFICATION DES SYSTÈMES HAMILTONIENS SOUS L'ACTION PLATE D'UN GROUPE DE LIE.

Un point important de nos études est que l'on peut obtenir les représentations HIPI par une construction connue parmi les physiciens et mathématiciens comme le procédé de quantification, qu'on fait tantôt physiquement, tantôt intuitivement. Nous le faisons par la géométrie différentielle.

Pour construire des systèmes quantiques correspondant à un système hamiltonien classique (M, ω) sous l'action plate d'un groupe de Lie connexe G, on doit définir des opérateurs de quantification et un espace hilbertien des états quantiques. Nous définissons un procédé de quantification à l'aide d'une connexion et d'une distribution intégrale, invariante, fermée, faiblement lagrangienne. Les représentations obtenues du groupe G peuvent être réalisées comme des représentations HIPI du groupe G, considérées dans le chapitre I

Dans le paragraphe II. 1. nous allons construire les opérateurs de la quantification géométrique multidimensionnelle à l'aide d'une connexion ∇. Nous montrerons qu'on doit imposer une condition sur sa courbure. Pour appliquer le procédé de quantification à la théorie des représentations, on doit faire une hypothèse sur l'action du groupe G dans la variété symplectique (M, ω). C'est ce que nous ferons dans le paragraphe II. 2. Dans § II. 3., nous prendrons une distribution spécifiquè dans lè fibré tangent complexifié pour faire l'espace hilbertien des états quantiquès. Et enfin, au paragraphe II. 4. nous montrerons que les constructions des représentations HIPI et des quantifications donnent une même quantité de représentations, en prouvant que la dérivée de Lie des représentations HIPI est justement le procédé de quantification.

Les résultats de cè chapitre sont publiés dans les deux travaux de l'auteur [12], [9].

II.1. QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE MULTIDIMENSIONNELLE.

II.1.1. Soient (M, ω) une variété symplectique, $C^\infty(M)$ l'algèbre de lie des fonctions lisses avec le crochet de poisson

$$f_1, f_2 \in C^\infty(M) \mapsto \{f_1, f_2\} \in C^\infty(M)$$

Un *procédé de quantification* est une correspondance associant à chaque quantité classique $f \in C^\infty(M)$ une quantité quantique $\widehat{f}$, c'est-à-dire un opérateur hermitien, qui est autoadjoint si f est une fonction réelle, dans un espace hilbertien H, telle que

$$\widehat{\{f_1, f_2\}} = \frac{i}{\hbar}[\widehat{f}_1, \widehat{f}_2], \quad \widehat{1} = I, \text{ où } \hbar = h/2\pi, \ h \text{ est la constantè de Planck.}$$

II.1.2. Soiènt $\mathcal{E}$ un fibré localement trivial en espaces hilbertiens, ∇ une connexion conservant la structure hilbertienne sur les fibres, c'est-à-dire si γ est une courbe joignant les 2 points x et x' de M, le transport parallèle le long du chemin γ est un isomorphisme de la fibre $\mathcal{E}_x$ sur la fibre $\mathcal{E}_{x'}$, qui conserve le produit scalaire. Dans ce cas, nous pouvons, comme toujours, définir la dérivée covariante ∇_ξ, $\xi \in$ Vect (M) dans l'espace des sections lisses. A l'aide d'une polarisation (voir le §II.3) nous choisissons un espace hilbertien des états quantiques, comme la complétion d'un sous-espace des sections P.H.P.I. de carrés intégrables.

II. 1.3. Soient L_ξ la dérivée de Lie suivant le champ de vecteurs $\xi \in \mathrm{Vect}(M)$, $\beta \in \Omega^1(M)$ une 1-forme de la connexion ∇ dont les valeurs sont des opérateurs anti-autoadjoints. Il est commode de considérer aussi la *forme «normalisée»* $\alpha(\xi) = \frac{i}{\hbar}\beta(\xi)$, dont les valeurs sont les opérateurs autoadjoints.

II.1.4. Pour chaque *fonction lisse* $f \in C^\infty(M)$ nous désignerons par ξ_f le *champ de vecteurs hamiltonien* correspondant, autrement dit $i(\xi_f)\,\omega + df = 0$.

Donc nous considérons l'*opérateur de quantification géométrique multidimensionnelle* $\widehat{f} = f + \frac{\hbar}{i}\nabla_{\xi_f}$.

II.1.5. THÉORÈME. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

1. $\xi\alpha(\eta) - \eta\alpha(\xi) - \alpha([\xi, \eta]) + \frac{i}{\hbar}[\alpha(\xi), \alpha(\eta)] = -\omega(\xi, \eta)I$

2. *La courbure de la forme de connexion est égale à* $-\frac{i}{\hbar}\omega I$, i.e.,

$$[\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi,\eta]} = -\frac{i}{\hbar}\omega(\xi, \eta)I$$

3. *La correspondance* $f \to \widehat{f}$ *est un procédé de quantification.*

II.1.6. **Démonstration.** (1) $\rightleftarrows$ (2) : Nous avons

$$[\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi,\eta]} = [L_\xi + \frac{i}{\hbar}\alpha(\xi), L_\eta + \frac{i}{\hbar}\alpha(\eta)] - L_{[\xi,\eta]} - \frac{i}{\hbar}\alpha([\xi, \eta])$$

$$= [L_\xi, L_\eta] + \frac{i}{\hbar}[L_\xi, \alpha(\eta)] - \frac{i}{\hbar}[L_\eta, \alpha(\xi)] + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2[\alpha(\xi), \alpha(\eta)] - L_{[\xi,\eta]} - \frac{i}{\hbar}\alpha([\xi,\eta])$$

$$= [L_\xi, L_\eta] - L_{[\xi,\eta]} + \frac{i}{\hbar}\{[L_\xi, \alpha(\eta)] - [L_\eta, \alpha(\xi)] - \alpha([\xi, \eta]) + \frac{i}{\hbar}[\alpha(\xi), \alpha(\eta)]\}$$

D'après la géométrie différentielle, nous avons $[L_\xi, L_\eta] = L_{[\xi,\eta]}$

Alors, il reste à prouver l'assertion suivante.

LEMME I. $[L_\xi, \alpha(\eta)] = \xi\alpha(\eta)$

En effet, en appliquant cet opérateur $[L_\xi, \alpha(\eta)]$, à une section arbitraire $s \in \Gamma(\zeta)$, nous avons

$$[L_\xi, \alpha(\eta)]s = L_\xi(\alpha(\eta)s) - \alpha(\eta)L_\xi s = L_\xi\alpha(\eta)s + \alpha(\eta)L_\xi s - \alpha(\eta)L_\xi s = \xi\alpha(\eta)s.$$

(2) $\rightleftarrows$ (3). D'après la définition, nous avons

$$\frac{i}{\hbar}[\widehat{f_1},\widehat{f_2}]=\frac{i}{\hbar}[f_1+\frac{\hbar}{i}\nabla\xi_{f_1}, f_2+\frac{\hbar}{i}\nabla\xi_{f_2}]=\frac{i}{\hbar}\Big\{\frac{\hbar}{i}\Big[f_1, \nabla\xi_{f_2}\Big]+\frac{i}{\hbar}[\nabla\xi_{f_1}, f_2]+$$
$$+\left(\frac{\hbar}{i}\right)^2[\nabla\xi_{f_1}, \nabla\xi_{f_2}]\Big\}=[f_1, \nabla\xi_{f_2}]+\frac{\hbar}{i}\nabla\xi_{\{f_1, f_2\}}-\frac{\hbar}{i}\nabla\xi_{\{f_1,f_2\}}+$$
$$+[\nabla\xi_{f_1}, f_2]+\frac{\hbar}{i}[\nabla\xi_{f_1}, \nabla\xi_{f_2}]$$

Il est connu d'après la géométrie différentielle que

$$\xi_{\{f_1, f_2\}}=[\xi_{f_1}, \xi_{f_2}]$$

Alors il reste à prouver seulement l'assertion suivante.

LEMME 2. $[f_1 \ , \nabla\xi_{f_2}]=[\nabla\xi_{f_1}, f_2]=-\xi_{f_2} f_1=\xi_{f_1}f_2=\omega(\xi_{f_1}, \xi_{f_2})=$
$=\{f_1, f_2\}$.

En effet, d'après les définitions, f_1 est l'opérateur de multiplication par la fonction scalaire f_1, $B(\xi_{f_2})$ est l'opérateur de multiplication par la fonction à valeurs opératorielles. Alors $[f_1, B(\xi_{f_2})]=0$. Comme

$$\nabla\xi_{f_2}=L_{\xi_{f_2}}+B(\xi_{f_2}),$$

on a

$$[f_1, \nabla\xi_{f_2}]=[f_1, L_{\xi_{f_2}}].$$

pour une section arbitraire $s\in\Gamma(\mathscr{E})$, on a

$$[f_1, L_{\xi_{f_2}}]s=[f_1 (L_{\xi_{f_2}} s)-L_{\xi_{f_2}}(f_1 s)=-L_{\xi_{f_2}}(f_1)\cdot s=\omega(\xi_{f_1}, \xi_{f_2})s.$$

De façon analogue:

$$[\nabla\xi_{f_1}, f_2]=\xi_{f_1}(f_2)=\omega(\xi_{f_1}, \xi_{f_2}).$$

Le théorème est prouvé.

II. 2. APPLICATION AUX REPRÉSENTATIONS DE GROUPES DE LIE.

Supposons que le groupe de Lie G agisse sur M par les transformations canoniques, $\mathcal{G}$ soit l'algèbre de Lie de G. Donc, pour chaque élément X de $\mathcal{G}$, le sous-groupe à un paramètre $\{\exp(tX)\}_{t\in R}\subset G$ agit sur M et il lui correspond un champ de vecteurs hamiltonien ξ_X.

II. 2. 1. Supposons que pour tout X de $\mathcal{G}$, le champ de vecteurs ξ_X soit strictement hamiltonien (cf. A.Kirillov [1, §15. 2]) et que f_X soit le potentiel correspondant. Nous désignerons par L_X la dérivée de Lie suivant le champ de vecteurs ξ_X. Nous avons bien sûr

$$[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}$$
$$L_X f = \{f_X, f\}.$$

II. 2. 2. Supposons que f_X dépende linéairement de X. Alors on a un 2-cocycle d'algèbre de Lie

$$c(X, Y) = \{f_X, f_Y\} - f_{[X, Y]}$$

D'après le procédé de quantification nous avons

$$[\wedge(X), \wedge(Y)] = \wedge([X, Y]) + c(X, Y)$$

en posant $\wedge(X) = \frac{i}{\hbar}\widehat{f}_X = \frac{i}{\hbar} f_X + \nabla_{\xi_X}$.

II.2.3. DEFINITION. Nous disons que l'action du groupe de Lie G est *plate*, si le cocycle c(X, Y) est nul.

II.2.4. Dans ce cas, nous avons une représentation $\wedge$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ par les opérateurs antiautoadjoints et ainsi une représentation de $\mathcal{G}$ par les fonctions lisses

$$X \rightarrow f_X$$

Si les conditions de E. Nelson sont satisfaites, nous avons une représentation $\exp\left(\frac{i}{\hbar}\widehat{f}_X\right)$ du revêtement universel $\widetilde{G}$ de G. Nous obtenons la conclusion suivante. Pour obtenir les représentations unitaires du groupe G, il nous faut prendre les variétés symplectiques sous l'action plate du groupe de Lie G.

II.3. POLARISATION D'UNE G-ORBITE ET CONSTRUCTION DES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES.

Soient (M, ω) une variété symplectique sous l'action plate du groupe de Lie G, $O(M) = M/G$ l'espace des G-orbites, $\Omega \in O(M)$ une G-orbite fixée, $x \in \Omega$ un point fixé de Ω, G_x le stabilisateur du point x, $\mathcal{G}_x$ l'algèbre de Lie de G_x, $(G_x)_0$ la composante connexe de l'élément neutre du groupe G_x, $\widetilde{\sigma}$ une représentation unitaire du groupe G_x dont le noyau contient $(G_x)_0$.

II.3.1. DÉFINITION. *Nous disons que la G-orbite Ω est* entière, *s'il existe un caractère (unitaire) χ_x du groupe G_x tel que la représentation correspondante de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_x$ soit*

$$X \to \frac{i}{\hbar} f_x(x)$$

II.3.2. Remarque. La notion de G-orbite entière ne dépend pas du choix du point x, parce que tous les champs de vecteurs considérés sont invariants.

II. 3. 3. Soient $T\Omega_C$ le fibré tangent complexifié de l'orbite Ω, $L \subset T\Omega_C$ une distribution lisse intégrable, invariante, telle que $L + \overline{L}$ soit aussi intégrable. L'ensemble de toutes les sections lisses invariantes de L forme une algèbre de Lie $\mathcal{L}$, isomorphe à l'algèbre L_x des valeurs de L au point x, et invariante relativement à l'action adjointe du groupe G_x. Alors *l'image réciproque $\mathcal{P}$ de $\mathcal{L}$ relativement à la projection canonique $\mathcal{G}_C \to \mathcal{G}_C/(\mathcal{G}_x)_C \cong (\mathrm{Vect}_G\Omega)_C$ peut être identifiée à une sous-algèbre de Lie de la complexifiée $\mathcal{G}_C$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, telle que $\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}$ soit aussi une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{G}_C$.*

En effet, tout d'abord chaque section lisse invariante de L est un champ de vecteurs invariant. Alors $\mathcal{L} \hookrightarrow (\mathrm{Vect}_G\, \Omega)_C$. D'après l'intégrabilité de L, $\mathcal{L}$ est une sous-algèbre, et puis d'après la G-invariance de L, $\mathcal{L}$ est isomorphe à L_x. Comme un espace vectoriel, $\mathcal{P}$ est isomorphe à la somme directe $\mathcal{L} \oplus \mathcal{G}_x$. D'après la $\mathrm{Ad}(G_x)$-invariance de L, on a $[\mathcal{G}_x, L_x] \subset L_x$, c'est-à-dire $[\mathcal{G}_x, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$. Alors $\mathcal{P}$ est une sous-algèbre. Par une méthode toute analogue, nous avons ainsi l'assertion : $\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}$ est ainsi une sous-algèbre de Lie complexe de $\mathcal{G}_C$.

II.3.4. DÉFINITION. *Nous disons que la distribution L est fermée, si les sous-groupes connexes H_0, M_0 de G, correspondant aux sous-algèbres de Lie $\mathcal{H} = \mathcal{P} \cap \mathcal{G}$, $\mathcal{M} = (\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}) \cap \mathcal{G}$ et les sous-groupes de Lie $H = G_x . H_0$, $M = G_x . M_0$ sont fermés.*

II.3.5. DÉFINITION. *Nous disons que (L, ρ, σ_0) est une $(\chi_x, \tilde{\sigma})$ — polarisation et L est faiblement lagrangienne si :*

a) σ_0 est une représentation irréductible du groupe H_0 dans l'espace hilbertien V telle que : (1) La restriction $\sigma_0|_{G_x \cap H_0}$ est un multiple de la restriction à $G_x \cap H_0$ de la représentation $\chi_x . \tilde{\sigma}$, (2) Le point σ_0 est fixé sous l'action du groupe G_x dans le dual $\widehat{H_0}$ du groupe H_0, *b) ρ est une représentation de l'algèbre de Lie complexe $\mathcal{P}$ dans V qui satisfait à toutes les conditions de E.Nelson pour H_0 et $\rho|_{\mathcal{H}} = d\sigma_0$.*

II.3.6. **Remarque.** Dans le cas des K-orbites, $\sigma_0 = \chi_x$ et la distribution L est maximale, nous retrouvons la notion de polarisation et distribution lagrangienne au sens de A.Kirillov [1, §15.4]. D'où on a les nôtres comme les généralisations correspondantes.

II.3.7. THÉORÈME. *(L, ρ, σ_0) est une $(\chi_x, \widetilde{\sigma})$- polarisation et dans ce cas L est une distribution intégrable invariante, fermée, faiblement lagrangienne, si, et seulement si, $(\mathcal{P}, H, \rho, \sigma_0)$ est une $(\widetilde{\sigma}, x)$— polarisation au sens de la méthode des K-orbites (voir D.N.Ziêp [8, Définition 1.1] et aussi le chapitre suivant).*

Démonstration. D'après II.3.3. et II.3.4. nous avons reconstruit une $(\widetilde{\sigma}, x)$ - polarisation, ayant une $(\chi_x, \widetilde{\sigma})$ - polarisation (L, ρ, σ_0) donnée; c'est-à-dire, nous avons reconstruit un complexe $(\mathcal{P}, H; \rho, \sigma)$ tel que:

(a) $\mathcal{P}$ est une sous-algèbre complexe de $\mathcal{G}_C$ contenant $\mathcal{G}_X$,

(b) La sous-algèbre $\mathcal{P}$ est invariante sous l'action Ad de G_X,

(c) L'espace vectoriel $\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}$ est la complexification d'une sous-algèbre de Lie réelle $\mathcal{M} = (\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}) \cap \mathcal{G}$,

(d) Tous les sous-groupes M_o, H_o, M, H sont fermés dans G, où M_o (resp., H_o) est le sous-groupe connexe de G, d'algèbre de Lie $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{H} = \mathcal{P} \cap \mathcal{G}$) et $M = G_X . H_o$, $H = G_X . H_o$.

(e) σ_o est une représentation irréductible de H_o dans l'espace hilbertien V telle que: (1) la restriction $\sigma_o \mid H_o \cap G_x$ est un multiple de la restriction à $G_x \cap H_o$ de la représentation $\chi_x . \widetilde{\sigma}$, où χ_x est construite dans II.3.1., (2) le point σ_o est fixé par l'action du groupe G_x dans le dual $\widehat{H}_o$ du groupe H_o.

(f) ρ est une représentation de l'algèbre de Lie complexe P dans V, qui satisfait à toutes les conditions de E. Nelson pour H_o, et $\rho \mid \mathcal{H} \cong d\sigma_o$.

Donc $(P, H; \rho, \sigma)$ est vraiment une $(\widetilde{\sigma}, x)$ – polarisation au sens de la méthode des K-orbites (voir ch. III, ci-dessous).

Inversement, nous pouvons bien sûr reconstruire une $(\chi_x, \tilde{\sigma})$-polarisation $(L;\ \rho,\ \sigma_o)$ ayant une $(\tilde{\sigma}, x)$-polarisation $(\mathcal{P}, H;\ \rho, \sigma_o)$. Le théorème est prouvé.

Nous pouvons maintenant déduire automatiquement les corollaires qui sont tous analogues à ceux de la proposition I.1.4. et du Théorème I.1.7., en changeant une $(D, \tilde{\sigma})$-polarisation par une $(\chi_x, \tilde{\sigma})$-polarisation $(L;\ \rho,\ \sigma_o)$.

II.3.8. THÉORÈME. *Soient Ω une G-orbite entière de la variété symplectique (M, ω) sous l'action plate d'un groupe de Lie fixé G, $(L;\ \rho,\ \sigma_o)$ une $(\chi_x, \tilde{\sigma})$-polarisation de Ω, où $\tilde{\sigma}$ est une représentation de G_x dont le noyau contient $(G_x)_o$. Alors*

1) Il existe une structure de variété mixte de type (k, l, *m*), où

k = dim G — dim M,

l = 1/2 (dim M — dim H),

m = dim H — dim G_x

2) *Il existe une représentation unitaire irréductible unique σ du groupe* H *telle que $\sigma|_{G_x}$ soit un multiple de $X_x . \tilde{\sigma}$ et $\rho|_{\mathcal{H}} = d\sigma$.*

Démonstration.

Comme $\Omega = G_x \backslash G$ et d'après le théorème II.3.7 l'on peut reconstruire de façon unique une $(\tilde{\sigma}, x)$-polarisation $(\mathcal{P}, H;\ \rho,\ \sigma_o)$. Nous avons tout de suite l'assertion 1.

Nous montrons maintenant l'existence de σ par une construction directe. D'après la définition II.3.5., et d'après II.3.3., II.3.4., on a $(G_x)_o \subset H_o$. Alors $(G_x)_o$ est justement la composante connexe de l'élément neutre dans $H_o \cap G_x$. Nous avons $\sigma_o|_{H_o \cap G_x} \simeq I_{V'} \otimes (X_x . \tilde{\sigma})|_{H_o \cap G_x}$.

D'autre part, d'après la condition II.3.3., G_x normalise H_o. Donc G_x agit sur le dual $\widehat{H}_o$ du sous-groupe H_o. Par hypothèse σ_o est fixé sous l'action de G_x, donc nous pouvons définir la représentation σ par la construction suivante. La formule

$$(x, h) \to (I_{V'} \otimes \chi_x \tilde{\sigma})\ (x)\ \sigma_o\ (h)$$

définit une représentation du produit direct $G_x \times H_o$ dans l'espace V.

En effet, d'une part nous avons

$$(x, h) . (x', h') \to (I_{V'} \otimes \chi_x . \tilde{\sigma})(x)\sigma_o(h) . (I_{V'} \otimes \chi_x . \tilde{\sigma})(x')\sigma_o(h')$$

$$= (I_{V'} \otimes \chi_x . \tilde{\sigma})(xx')(I_{V'} \otimes \chi_x . \tilde{\sigma})(x'^{-1})\sigma_o(h)(I_{V'} \otimes \chi_x . \tilde{\sigma})(x')\sigma_o(h')$$

$$= (I_{V'} \otimes \chi_x . \tilde{\sigma})(xx')(x . \sigma_o)(h)\sigma_o(h')$$

$$\simeq (I_{V'} \otimes \chi_x . \tilde{\sigma})(xx')\sigma_o(hh').$$

D'autre part, nous avons

$$(x, h) . (x', h') = (xx', hh') \to (I_{V'} \otimes \chi_x . \tilde{\sigma})(xx')\sigma_o(hh').$$

La représentation $(x, h) \to (I_{V'} \otimes \chi_x . \tilde{\sigma})(x)\sigma_o(h)$ est triviale sur le noyau de la surjection

$$G_x \times H_o \to G_x . H_o$$
$$(x, h) \to x . h$$

Alors il existe une représentation unique σ du produit semidirect $H = G_x . H_o$. Il est clair que σ est justement la rèprésentation nécessaire.

Maintenant nous avons la situation du Théorème I.1.7., où $\Omega = G_x \backslash G$ et $(\mathcal{P}, H; \rho, \sigma)$ est une $(G_x, \chi_x . \tilde{\sigma})$-polarisation.

Considérons le fibré $\mathcal{E}$ associé à la représentation $\sigma|_{G_x}$, $\mathcal{E} = G_{G_x} \times V$ qui est isomorphe au fibré $\pi^*\overline{\mathcal{E}}$, où $\overline{\mathcal{E}}$ est le fibré sur $H \backslash G$ associé à la représentation σ du sous-groupe H et π est la projection $G_x \backslash G \to H \backslash G$. Fixant une connexion du fibré principal $H \to G \to H \backslash G$, nous avons une connexion affine $\overline{\nabla}$ du fibré associé à la représentation σ. Donc sur $\mathcal{E}$ nous avons une connexion induite $\nabla = \pi^*\overline{\nabla}$.

II.3.9. La section s du fibré $\mathcal{E}$ est dite *partiellement holomorphe partiellement invariante* si elle a une dérivée covariante nulle suivant les champs de vecteurs qui sont les sections invariantes de la distribution $\overline{L}$.

Donc l'espace des sections p.h.p.i. de carré intégrable de $\tilde{\mathcal{E}}$ qui est une unitarisation de $\mathcal{E}$ (voir, §I.2.) est invariant relativement aux opérateurs de quantification et nous prenons sa complétion comme l'espace hilbertien des états quantiques.

II.3.10. COROLLAIRE. *La représentation naturelle, dite représentation holomorphiquement induite partiellement invariante et désignée par Ind $(G ; L, x, \rho, \sigma_o)$ du groupe G dans l'espace des sections p.h.p.i. est équivalente à la représentation par les translations à droite de ce groupe dans l'espace $C^\infty(G ; L, x, \rho, \sigma_o)$ des C^∞-fonctions sur G à valeurs dans V, qui satisfont au système d'équations suivant*

$$f(hx) = \sigma(h)\, f(x),\ h \in H \text{ et } x \in E$$
$$(L_X + \rho(X))\, f = 0 \qquad X \in \overline{\mathcal{P}}$$

II.4. DÉRIVÉE DE LIE DES REPRÉSENTATIONS HIPI ET QUANTIFICATION

Le but de ce paragraphe est de montrer que les deux constructions de représentations HIPI et de la quantification géométrique multidimensionnelle nous donnent une même quantité de représentations irréductibles du groupe considéré !

II.4.1. THÉORÈME. *La dérivée covariante de la représentation HIPI Ind $(G ; \mathcal{P}, H, \rho, \sigma)$ est justement la représentation*

$$X \to \frac{i}{\hbar} \hat{f}_X$$

de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ du groupe G, obtenue par le procédé de quantification.

II.4.2. Pour prouver le théorème, on doit tout d'abord préciser les notions, en particulier la notion de dérivée covariante dans le cas des fibrés de dimension infinie. La démonstration est assez longue ; alors il nous faut une analyse détaillée de la notion de connexion affine. Nous la dérivons en quelques étapes.

II.4.3. *Justification du fibré de dimension infinie $\mathcal{E}_{\sigma,\, \rho}$.*

Premièrement nous rappelons la construction des fibrés associés à une représentation σ. Nous savons que $\mathcal{E}_{\sigma,\,\rho} = G \underset{G_X}{\times} V = G \times V/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence suivante : $(g, v) \sim (g', v')$ si et seulement si, il existe $k \in G_X$ tel que $g' = kg$ et $v' = \sigma(k)v$. Nous remarquons que V est un espace hilbertien, σ est une représentation unitaire. Alors $\mathcal{E}_{\sigma,\,\rho}$ est un fibré vectoriel dont les fibres sont de dimension infinie. Le groupe structurel du fibré $\mathcal{E}_{\sigma,\,\rho}$ est un sous-groupe du groupe des opérateurs unitaires $U(V)$ de V. Notre situation est aussi bonne, parce que le groupe structural est identifié à un sous-groupe de Lie de dimension finie du groupe $U(V)$ comme image directe du groupe de Lie G_X

suivant la représentation σ. Alors nous pouvons appliquer le théorème de Stone au groupe structural indiqué, et nous pouvons parler de l'algèbre de Lie de dimension finie du groupe structural de $\mathcal{E}_{\sigma,\rho}$.

II.4.4. *Dérivée covariante des homomorphismes.* Maintenant nous modifions les résultats liés à la dérivée covariante des homomorphismes d'un fibré en espaces hilbertiens de type $\mathcal{E}_{\sigma,\rho}$. Le cas des fibrés de dimension finie est assez connu, voir par exemple Kosmann — Schwarzbach [1].

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ deux fibrés de ce type sur la base homogène $M = G_1 \diagdown G$, associés aux représentations σ et σ', respectivement du sous-groupe G_1 dans G. Alors G agit sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ par les actions naturelles. Nous définissons l'action de G sur Hom $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ comme suit.

Supposons que $u \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ et u_M est la projection de u sur la base $M = G_1 \diagdown G$. Alors nous définissons :

$g \, . \, u = g \;\; u \, . g^{-1}$, pour tous $g \in G$.
Donc $g \, . \, u \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$.

Soit X un élément d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G, et supposons que $\{ g_t \}$ est le sous-groupe à un paramètre correspondant,

$g_t = \exp(tX)$.

Pour les valeurs assez petites de t, $g_t \circ \tilde{u} = g_t \circ u_0 g_t^{-1}$ sont bien définis, comme les homomorphismes du fibré $\mathcal{E}$ dans le fibré $\mathcal{E}$ aux morphismes associés $g_t \circ u_M \circ g_t^{-1}$ sur la base $M = G_1 \diagdown G$.

L'ensemble Hom $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ peut être considéré comme un sous-ensemble de l'espace vectoriel des opérateurs linéaires de l'espace $\Gamma(\mathcal{E})$ des sections lisses de $\mathcal{E}$ dans l'espace $\Gamma(\mathcal{E}')$ des sections lisses de $\mathcal{E}'$. Alors nous définissons

$$\mathrm{X} \, . \, u = \frac{d}{dt} \, (g_t \circ u) \, |_{t=0}$$

Comme dans le cas des dimensions finies, considéré par Y.Kosmann — Schwarzbach [1] dans notre cas de dimension infinie, d'après le théorème de Stone cité plus haut, on obtient les résultats :

1) $X \, . \, u$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 de $\mathcal{E}$ dans $u_M^* \mathcal{E}'$ et

$X \, . \, u = X_{\mathcal{E}} \circ u - u_0 X_{\mathcal{E}}$,

où $X_{\mathcal{E}}$ et $X_{\mathcal{E}'}$ sont considérés comme des opérateurs différentiels d'ordre 1 dans les espaces des sections lisses de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, respectivement.

2) Si la projection u_M de u sur la base $M = G_1 \setminus G$ est l'application identique et les projections sur M des actions de G sont identiques, alors $X.u$ est un homomorphisme de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$. C'est justement la dérivée de Lie de l'action de exp X dans le fibré $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}'$, où $\mathcal{E}^*$ est le fibré hilbertien dual du fibré $\mathcal{E}$.

3) Enfin, si $\mathcal{E} = M$, u est une section du fibré $\mathcal{E}'$, nous avons une connexion Δ' sur $\mathcal{E}'$.

On peut vérifier sans difficulté dans notre cas de dimension infinie la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{Aut}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{semi\text{-}linear}\,(\Gamma(\mathcal{E})) \\ \mathcal{A}\,(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathrm{End}_{Der}\ \Gamma(\mathcal{E}) \to \mathrm{Diff}^1_{scal}\,(\mathcal{E}) \end{array}$$

Dans notre cas, nous pouvons prouver aussi que la différentielle d'un C^∞-homomorphisme d'un groupe de Lie dans Aut $(\mathcal{E})$ est un homomorphisme de l'algèbre de Lie correspondante dans l'algèbre de Lie $\mathrm{Diff}^1_{scal}(\mathcal{E})$ des opérateurs différentiels à symboles scalaires.

II.4.5. *Connexion.* En général, une connexion affine d'un fibré vectoriel est une manière d'identifier les fibres d'un fibré $\mathcal{E}$. On fait cela à l'aide d'une 1-forme différentielle α_1 à valeurs dans l'algèbre de Lie ,du groupe structural de $\mathcal{E}$. Nous pouvons toujours écrire explicitement la formule de la dérivée covariante correspondante

$$\Delta_\xi = \mathcal{E}_\xi + \frac{i}{\hbar}\alpha_1(\xi)\,.$$

Cela est en accord avec le II. 4.4.

II.4.6. *Identification et calcul de la représentation HIPI* Ind $(G; H, \sigma, \rho)$ *dans* $\Gamma\ (\mathcal{E}_{\sigma,\ \rho})$.

Nous rappelons que $\mathcal{E}_{\sigma,\ \rho}$ est bien l'ensemble des couples $(g, v) \in G \times V$ factorisé par la relation d'équivalence : $(g, v) \sim (g', v')$ si, et seulement s'il existe un élément $k \in G_X$ tel que $g' = kg$, $v' = \sigma(k)v$. Les sections lisses de $\mathcal{E}_{\sigma,\ \rho}$ peuvent être identifiées aux fonctions sur G à valeurs dans V satisfaisant

$$f(kx) = \sigma(k)\,f(x),\ k \in G_Y\ ,\ x \in G.$$

L'action de G sur $\Gamma\,(\mathcal{E})$ peut être identifiée à l'action de G dans $C^\infty(G, V)$ par les translations à droite : $s \in \Gamma(\mathcal{E}) \leftrightarrow f_s \in C^\infty(G, G_X\,;\,V)$.

Alors la dérivée de Lie de l'action de la représentation HIPI Ind $(G; P, H, \rho, \sigma)$ est justement la représentation de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ du groupe G,

$$\nabla_{\xi_X} = L_{\xi_X} + \frac{i}{\hbar} \alpha_1(\xi_X), \; X \in \mathcal{G},$$

qui doit être identifiée aux opérateurs différentiels

$$\nabla_{\xi_X} + \rho(X), \; X \in \mathcal{G},$$

dans $C^\infty(G; V)$.

II.4.7. *Forme différentielle* β. Nous rappelons que chaque point $y \in M = G_X \diagdown G$ est en même temps une fonction linéaire sur l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G

$$\langle y, X \rangle = f_X(y), \; X \in \mathcal{G}$$

où f_X est le potentiel du champ de vecteurs ξ_X de l'action du sous-groupe à un paramètre $\exp(tX)$ sur $M = G_X \diagdown G$.

Nous définissons la forme β par la formule

$$\langle \beta, \xi \rangle (y) \overset{def}{=} \langle y, \xi(e) \rangle,$$

où $y \in \mathcal{G}^*$ comme nous avons dit plus haut, $\xi(e) \in \mathcal{G}/\mathcal{G}_x$ et $y \mid \mathcal{G}_x$ est invariable, d'après la définition de $y = \langle y, . \rangle = f_{(.)}(y)$.

Nous avons

$$f_X(y) = \langle y, X \rangle = \langle \beta, \xi_X \rangle (y).$$

II.4.8. *Fin de la démonstration du théorème.*
Nous avons

$$\begin{aligned}\nabla_{\xi_X} &= L_{\xi_X} + \frac{i}{\hbar} \alpha_1(\xi_X) \\ &= L_{\xi_X} + \frac{i}{\hbar} f_X + \frac{i}{\hbar}(\alpha_1(\xi_X) - B(\xi_X))\end{aligned}$$

Nous désignerons par α la forme différentielle $\alpha_1 - \beta$
Alors

$$\begin{aligned}\nabla_{\xi_X} &= L_{\xi_X} + \frac{i}{\hbar} \alpha(\xi_X) + \frac{i}{\hbar} f_X \\ &= \frac{i}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{i} L_{\xi_X} + f_X + \alpha(\xi_X)\right) \\ &= \frac{i}{\hbar} \widehat{X}\end{aligned}$$

Alors le théorème est prouvé.

II.4.9. Remarques. 1) Nous avons déduit explicitement la formule de la forme α de connexion affine :

$$\alpha = \alpha_1 - B$$

2) Le théorème n'a pas été prouvé, même da s le cas de quantification 1-dimensionnelle. Donc notre preuve est bien la première en date.

III. CONSTRUCTION DES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES PAR LES K-ORBITES

Maintenant nous appliquons le procédé de quantification et la construction des représentations HIPI pour obtenir les représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie. Pour ce faire, la méthode habituelle des orbites utilise un procédé de quantification par les fibrés en droites. Nous avons construit un procédé de quantification géométrique multidimensionnelle, en partant de G-fibrés irréductibles arbitraires associés à un système hamiltonien donné.

En remarquant que chaque K-orbite de l'espace dual de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G est bien un espace symplectique relativement à la 2-forme associée à la forme bilinéaire alternée invariante,

$$\langle F, [X, Y] \rangle = \omega\,(X, Y)$$

nous pouvons quantifier chaque orbite de G sous l'action coadjointe de G dans l'espace dual de l'algèbre de Lie du groupe G, dite *K-orbite.*

Dans le paragraphe III.1. nous exposons les notions correspondantes sur chaque K-orbite. En particulier, nous modifions la notion de polarisations sur les K-orbites. Après cela, dans le paragraphe III.2., nous exposons une construction des représentations unitaires par les K-orbites, se déduisant des constructions des chapitres I et II. Dans §III.3. nous exposons des exemples nontriviaux de (σ, F)-polarisations. Nous montrons que toutes les représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe peuvent être obtenues de telle manière. Enfin, nous indiquons les applications classiques de la méthode des K-orbites.

Les résultats sont en grande partie publiés dans un travail de l'auteur [8].

III.1. POLARISATIONS D'UNE K-ORBITE.

Soient G un groupe de Lie connexe, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie, $\mathcal{G}_C$ la complexification de $\mathcal{G}$. Pour un élément Z de $\mathcal{G}_C$ nous désignerons son élément conjugué par $\overline{Z}$. Si $\mathcal{A}$ est un sou-ensemble de $\mathcal{G}_C$, nous poserons

$$\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{Z};\, Z \in \mathcal{A}\}$$

Soient $\mathcal{G}^*$ l'espace dual de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, $O(G)$ l'espace des *K-orbites*, c'est-à-dire les orbites de G dans $\mathcal{G}^*$ sous l'action coadjointe, $\Omega \in O(G)$ une K-orbite entière fixée (voir, II.3.1), $F \in \Omega$ un point fixé sur Ω, G_F le stabilisateur du point F, $\mathcal{G}_F$ l'algèbre de Lie de (G_F), $(G_F)_0$ la composante connexe de l'élément neutre du groupe G_F, $\widetilde{\sigma}$ une représentation unitaire irréductible du groupe G_F dont le noyau contient $(G_F)_0$.

III.1.1. DÉFINITION. *Nous disons que* $(\mathcal{P}, \rho, \sigma_0)$ *est une* $(\widetilde{\sigma}, F)$*-polarisation, si :*

(*a*) $\mathcal{P}$ *est une sous-algèbre de Lie complexe de* $\mathcal{G}_C$ *contenant* $\mathcal{G}_F$.

(*b*) *La sous-algèbre* $\mathcal{P}$ *est invariante par tous les opérateurs*

$Ad_{\mathcal{G}_C}x$, $x \in G_F$,

(*c*) *L'espace vectoriel* $\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}$ *est la complexification d'une sous-algèbre de Lie réelle* $\mathcal{M}$ *c'est-à-dire* $\mathcal{M} = (\mathcal{P} + \overline{\mathcal{P}}) \cap \mathcal{G}$.

(*d*) *Tous les sous-groupes* M_0, H_0, M, H *sont fermés dans* G, *où* M_0(*resp.,* H_0) *est le sous-groupe connexe de* G, *d'algèbre de Lie* $\mathcal{M}$ (*resp.,* $\mathcal{H} = \mathcal{P} \cap \mathcal{G}$) *et* $M = G_F . M_0, H = G_F . H_0$.

(*e*) σ_0 *est une représentation irréductible du groupe* H_0 *dans un espace hilbertien* V *telle que* : (*1*) *la restriction* $\sigma \mid G_F \cap H_0$ *est un multiple de la restriction à* $G_F \cap H_0$ *de la représentation* $X_F . \widetilde{\sigma}$; *où* $X_F(expX) = exp\left(\frac{2\pi i}{h} < F, X>\right)$,

(*2*) *le point* σ_0 *est fixé sous l'action du groupe* G_F *dans le dual* $\widehat{H}_0$ *du groupe* H_0.

(*f*) ρ *est une représentation de l'algèbre de Lie complexe* $\mathcal{P}$ *dans* V, *qui satisfait à toutes les conditions de E. Nelson pour* H_0, *et* $\rho \mid \mathcal{H} = d\sigma_0$.

III.1.2. Remarque. Dans le chapitre I, nous avons la notion de $(D, \widetilde{\sigma})$-polarisations $(\mathcal{P}, H ; \rho, \sigma)$, puis dans le chapitre II, nous avons la notion de $(X_x, \widetilde{\sigma})$-polarisation (L, ρ, σ_0). Ici nous avons la notion de $(\widetilde{\sigma}, F)$-polarisation $(\mathcal{P}, \rho, \sigma_0)$, qui est distinguée des $(D, \widetilde{\sigma})$-polarisations et des $(X_x, \widetilde{\sigma})$-polarisations comme une modification synthétique.

III.1.3. Remarque. La constante $\hbar$ est prise égale à $\frac{2\pi}{h}$, où h est la constante de Planck. Pour la théorie mathématique exposée ici, sa valeur est inessentielle, pourvu qu'elle ne soit pas nulle. Nous prenons alors $h = 1$, d'où $\hbar = \frac{1}{2\pi}$.

III.2. CONSTRUCTION DES REPRÉSENTATIONS PAR LES K-ORBITES.

Nous pouvons maintenant déduire une construction des représentations unitaires par les K-orbites comme un corollaire des constructions exposées dans les deux chapitres précédents.

III.2.1. THÉORÈME. *Soient* Ω, F, $\tilde{\sigma}$, $(G_E)_0$, G_F, ${}_F$ *etc... comme dans le paragraphe précédent et* $X_F : G_F \to T$ *un caractère du groupe* G_F *tel que sa différentielle soit* $dX_F = 2\pi i\, F \mid \mathcal{G}_F$. *Alors :*

(1) Sur la K-orbite Ω *il existe une structure de variété mixte de type* (k, l, m), *où :*

$$K = dim\ G - dim\ M,$$
$$l = \frac{1}{2}(dim\ M - dim\ H),$$
$$m = dim\ H - dim\ G_F$$

(2) Il existe une représentation unitaire irréductible unique σ *du groupe* H *telle que* $\sigma \mid G_F$ *soit un multiple de* $X_F . \tilde{\sigma}$ *et* $\rho \mid \mathcal{H} = d\sigma$.

(3) Sur le fibré $\mathcal{E}_\sigma \mid G_F = G \underset{G_F}{\times} V$ *associé à la représentation* $\sigma \mid G_F$, *il existe une structure de G-fibré partiellement invariante et partiellement holomorphe* $\mathcal{E}_{\sigma, \rho}$ *telle que la représentation naturelle du groupe G dans l'espace des sections p.h.p.i. du fibré* $\mathcal{E}_{\sigma,\rho}$ *soit équivalente à la représentation par les translation à droite de ce groupe dans l'espace* $C^\infty(G ; \mathcal{P}, \rho, F, \sigma_o)$ *des* C^∞*-fonctions sur G à valeurs dans G qui satisfont au système d'équations suivant.*

$$f(hx) = \sigma(h)f(x), \quad h \in H, \quad x \in G$$
$$(L_X + \rho(X))f = 0, \quad X \in \overline{\mathcal{P}},$$

où L_X *est la dérivée de Lie par le champ de vecteurs* ξ_X *(invariante à droite) sur G, correspondant à X.*

Pour prouver le théorème, il nous reste seulement à remarque qu'on a bien sûr une correspondance bijective entre les $(G_F, \tilde{\sigma})$-polarisations $(\mathcal{P}, H, \rho, \sigma)$, les $(X_F, \tilde{\sigma})$-polarisations $(L; \rho, \sigma_o)$ et les $(\tilde{\sigma}, E)$-polarisations $(\mathcal{P}, \rho, \sigma_o)$ d'après II.1.1., II.3.5., II.3.7., II.3.8.(2), III.1.1.

III.2.2. Remarque. Dans l'ensemble de toutes les $(\tilde{\sigma}, F)$-polarisations, nous pouvo d finir une *relation d'ordre*

$$(\mathcal{P}, \rho, \sigma_o) < (\mathcal{P}', \rho', \sigma'_o) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}', \sigma'_o \mid_{H_0} \cong \sigma_o, \rho' \mid_{\mathcal{P}} \simeq \rho.$$

On voit que la représentation ci-dessus est réductible si la $(\tilde{\sigma}, F)$-polarisation n'est pas maximale. Alors dans la construction des représentations irréductibles par les K-orbites, il nous faut prendre les $(\tilde{\sigma}, F)$-polarisations maximales.

III. 2. 3. **Remarque.** Ici nous avons une généralisation naturelle de la méthode des K-orbites de A. A. Kirillov — B. Kostant.

III. 3. EXEMPLES DE $(\tilde{\sigma}, F)$-POLARISATIONS NON TRIVIALES.

Dans ce paragraphe, nous montrons, tout d'abord, une application essentielle de la méthode des K-orbites de A.A. Kirillov — B.Kostant. Ici nous pouvons obtenir, par la méthode des K-orbites, toutes les représentations irréductibles d'un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe. Cependant, notre méthode des K-orbites nouvelle nous donne une possibilité «plus rapide» d'obtenir les représentations irréductibles, en induisant à partir des sous-groupes invariants.

III. 3.1. Soient G un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^*$ l'espace dual de $\mathcal{G}$, $O(G)$ l'espace des K-orbites (sous l'action coadjointe de G dans $\mathcal{G}^*$), $\Omega \in O(G)$ une K-orbite entière fixée, $F \in \Omega$ un point fixé de Ω, G_F le stabilisateur de F d'algèbre de Lie $\mathcal{G}_F$, $\chi_F : G_F \to T$ le caractère unitaire de G_F de différentielle $d\chi_F = 2\pi i F | \mathcal{G}_F$, une polarisation (au sens de la méthode habituelle des K-orbites — voir par exemple A.A. Kirillov [1]) positive strictement admissible (voir L. Auslander — B. Kostant [1]) au point F, $T^{\Omega,\chi} F = \operatorname{Ind}(G;\ \mathcal{P},\ \rho,\ \chi_F)$ la représentation irréductible de G, correspondant à la K-orbite Ω, voir K. Auslander — B. Kostant [1], A.A. Kirillov [1, 2], D.N. Ziêp [8, 12]. Alors:

(1) La représentation T^{Ω,χ_F} ne dépend pas du choix de la polarisation, voir L. Auslander — B.Kostant [1, Th. III.4.1].

(2) La représentation T^{Ω,χ_F} est irréductible, voir L. Auslander — B. Kostant [1, Th. IV. 5. 7].

(3) L'ensemble de toutes les représentations $T^{\Omega,\chi F}$ forme tout le dual $\widehat{G}$ de G, voir L. Auslander — B. Kostant [1, § 0, Th. I], A. A. Kirillov [1, §15. 4, Th. 3].

III.3.2. Nous rappelons que la méthode des K-orbites exposée dans le paragraphe précédent est justement les $(\tilde{\sigma}, F)$-polarisations maximales, voir III. 2.2, $(\mathcal{P},\rho,\sigma_0)$ telles que $\sigma_0 = \chi_F$.

III.3.3. Enfin, nous montrons que notre méthode des K-orbites généralisée est plus confortable pour nous donner une possibilité décrire le dual $\widehat{G}$ du groupe G par l'induction des sous-groupes invariants. C'est justement le fait que nous pouvons appliquer les critères de compacité au chapitre VI.

III.3.4. Soient N le nil-radical de G d'algèbre de Lie $\mathcal{N}$, $f = F \mid_{\mathcal{N}}$, G_f le stabilisateur de f sous l'action de G dans $\mathcal{N}^*$, ayant $(G_f)_0$ comme composante connexe de l'élément neutre et $\mathcal{G}_f$ comme algèbre de Lie, $M = (G_f)_0\, G_F$ le sous-groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{M} = \mathcal{G}_f$, $A = MN$ le produit semi-direct d'algèbre de Lie $\mathcal{A} = \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, $l = F \mid_{\mathcal{M}}$, $k = F \mid_{\mathcal{A}}$. Alors les K-orbites Ω_k Ω_l Ω_f des points k, l, f dans $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{M}^*$, $\mathcal{N}^*$ respectivement, sont entières. Soient χ_k, χ_l χ_f les caractères des stabilisateurs $A_k M_l N_f$ des algèbres de Lie $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{M}_l$, $\mathcal{N}_f$, respectivement. Alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{A}_G = \mathcal{P}$, $\mathcal{P}_1 \overset{\text{def}}{=} \mathcal{P} \cap \mathcal{N}_{\mathbf{C}}$,

$$\mathcal{P}_2 \overset{\text{def}}{=} \mathcal{P} \cap \mathcal{M}_{\mathbf{C}}$$

sont les polarisations aux points k, f, l satisfaisant aux conditions de L. Pukanszky et on peut construire les représentations correspondant aux K-orbites $\Omega_k, \Omega_f, \Omega_l$:

$$\xi_1 = T^{\Omega_f, \chi_f} = \operatorname{Ind}(N; \mathcal{P}_1, \rho, \chi_f)$$

$$\xi_2 = T^{\Omega_l, \chi_l} = \operatorname{Ind}(M; \mathcal{P}_2, \rho, \chi_l)$$

$$\xi = T^{\Omega_k, \chi_k} = \operatorname{Ind}(A; \mathcal{P}, \rho, \chi_k) \overset{\sim}{=} \xi_1 \otimes \xi_2 .$$

III.3.5. On sait que (voir L. Auslander—B. Kostan [1, prop. II. 1.6]), Ker χ_l est un sous-groupe normal de M le groupe quotient $M_+ = M/\operatorname{Ker} \chi_l$ est un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{M}_l = \mathcal{M}/\mathcal{H}$ qui est isomorphe à l'algèbre de Heisenberg au centre $\mathcal{M}_l/\mathcal{H}$, où $\mathcal{H} = \operatorname{Ker}(F \mid_{\mathcal{M}_l})$.

Soient $\pi : M \to M_+$ la projection canonique, $d\pi : \mathcal{M}_{\mathbf{C}} \to (\mathcal{M}_+)_{\mathbf{C}}$ la différentielle de π, $l_+ \in \mathcal{M}_+^*$ tel que $l_+ \circ d\pi = l$. Alors $(\mathcal{M}_+)_{l_+}$ est exactement le centre $\mathcal{M}_l/\mathcal{H}$ de $\mathcal{M}_+$, $(M_+)_{l_+} = M_l/\operatorname{Ker} \chi_l$ et $\chi_l = \chi_{l_+} \circ \pi$, où χ_{l_+} est le caractère de $(M_+)_{l_+}$ de différentielle $2\pi i l_+$, donc la K-orbite Ω_{l_+} de M_+ dans $\mathcal{M}_+^*$ est entière.

Comme $\mathcal{M}_l \subset \mathcal{P}_2$, il existe une sous-algèbre $(\mathcal{P}_2)_+$ de $(\mathcal{M}_+)$ C telle que $d\pi^{-1}(\mathcal{P}_2)_+ = \mathcal{P}_2$ et $(\mathcal{P}_2)_+$ est une polarisation positive strictement admissible au point $\tilde{l}_+$.

D'après la proposition I. 5. 13. du travail cité de L. Auslander—B. Kostant [1], on a $\xi_2 = \mathrm{Ind}\,(M\,;\,\mathcal{P}_2\,,\rho,\,x_1) = \mathrm{Ind}\,(M_+,\,(\mathcal{P}_2)_+\,,\rho,x_{1_+})\circ\pi$

III. 3.6. On montre que ξ_1, ξ_2 sont les representations irréductibles du groupe nilpotent N et du groupe M. Le théorème III.4.1. de L.Auslander —B. Kostant [1] dit que Ind $(G\,;\,\mathcal{P},\rho,\,x_F) = \mathrm{Ind}_A^G\,\xi$.

III.3.7. *Conclusion.* Nous avons effectivement construit des $(G_F\,,\mathrm{Id}\circ\chi_F)$-polarisations réelles non triviales $(\mathcal{P},\,H,\rho,\sigma)$ avec $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cap \mathcal{G} = \mathcal{A}$, $H = A = MN$, $\rho = d\xi$, $\sigma = \xi$. Alors notre méthode K-orbites nous donne une autre réalisation des représentations irréductibles d'un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe arbitraire.

III. 4. SUR LES APPLICATIONS CLASSIQUES.

Nous avons deux généralisations de deux constructions : représentations holomorphiquement induites et la méthode des K-orbites, comme les représentations HIPI (Ch.I) et méthode des K-orbites sur les variétés symplectiques sous l'action plate du groupe de Lie considéré. Alors nous avons les outils nécessaires pour obtenir presque toutes les représentations irréductibles connues des groupes de Lie.

III.4.1. Comme une généralisation de la méthode des K-orbites de A.Kirillov-B. Kostant, notre construction nous donne toutes les représentations irréductibles des groupes de Lie résolubles connexes et simplement connexes, voir L.Auslander — B. Kostant [1], de groupes de Lie compacts arbitraires, voir A. Kirillov [1, §15.3]:

1) *Soit* G *un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe. Alors :*

(a) *Le groupe* G *est de type I si, et seulement si, l'espace des* K-*orbites est demi-séparable (c'est-à-dire,* T_1*-espace) et toutes les formes de Kirillov* B_Ω *sont fidèles.*

(b) *Soit, de plus,* G *un groupe de type I. Alors toutes les représentations irréductibles de* G *peuvent être obtenues par la méthode des* K-*orbites. A chaque* K-*orbite* Ω *correspond une famille de représentations indexées par les caractères du groupe fondamental* $\pi_1(\Omega)$ *de l'orbite considéré* Ω.

(c) *Toutes les représentations associées aux K-orbites différentes ou aux caractères différents d'une même K-orbite sont inéquivalentes entre elles.*

2) *Soit G un groupe Lie compact connexe et simplemnet connexe. Alors toutes les représentations irréductibles de G sont associées aux K-orbites entières de dimemsion maximale.*

3. *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe et simplement connexe, non compact. Alors la méthode des K-orbites nous donne la plus grande partie des séries connues des représentations: Les séries principales, les séries dégénérées...,* voir A. Kirillov [1, § 15.3.], Lipsman [1].

D'autant plus, notre construction des représentations HIPI dans les L^2-cohomologies nous donne un outil « presque universel » pour obtenir toutes les représentations des écoles I.M. Gelfand — M. A. Naimark et de Harish-Chandra, etc...

IV. APPLICATION AUX REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES DES GROUPES DE DIFFÉOMORPHISMES

Dans ce chapitre, nous appliquons la méthode des K-orbites généralisée du chapitre III, pour obtenir les représentations irréductibles des groupes des difféomorphismes. Nous reproduisons les représentations irréductibles de dimensions fonctionnelles finies dues à A. Kirillov [3].

IV. 1. LES K-ORBITES DE DIMENSION FINIE DES GROUPES DE DIFFÉOMORPHISMES

IV.1.1. Soit M une variété lisse, de dimension finie, connexe. L'ensemble $\mathrm{Diff}\, M$, composé des difféomorphismes avec la multiplication usuelle et la topologie de convergence uniforme de toutes les dérivées sur les compacts, est un groupe topologique. Soit K un compact dans M, nous désignerons par $\mathrm{Diff}_K M$ l'ensemble de tous les difféomorphismes qui sont identiques en dehors de K. Alors, avec la topologie induite, $\mathrm{Diff}_K M$ est un « groupe de Lie, » en général, dimension infinie (voir N. Bourbaki [1]). Soit $\mathrm{Diff}_c M = \varinjlim_{K \subseteq M} \mathrm{Diff}_K M$. Alors le groupe $\mathrm{Diff}_c M$ est un « groupe de Lie » de dimension infinie et il consiste en des difféomorphismes qui sont identiques en dehors d'un compact. Il est clair, que l'algèbre de Lie de $\mathrm{Diff}_c M$ est $\mathrm{Vect}_c\, M$, composée de champs de vecteurs lisses à support compact dans M. Nous remarquons que $\mathrm{Vect}_c M$ est un espace localement convexe, nucléaire.

IV.1.2. Soit (M, ω) une *variété symplectique*. Alors sur M il existe une *orientation canonique* qui est définie par la forme différentielle de degré maximal

$$\omega^{1/2 \dim M} = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{1/2 \dim M \text{ fois}}$$

Nous désignerons par $\mathrm{Diff}_c(M, \omega)$ le sous-groupe des $\mathrm{Diff}_c M$ des difféomorphismes, conservant la structure symplectique ω, c'est-à-dire des transformations canoniques à support compact. Alors $\mathrm{Diff}_c(M, \omega)$ est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est celle des champs de vecteurs hamiltoniens à support compact sur M,

$$\mathrm{Vect}_c(M, \omega) = \{ \xi \in \mathrm{Vect}_c M \,;\, L_\xi \omega = 0 \},$$

où L_ξ est la dérivée de Lie suivant le champ de vecteurs.

Nous rappelons que sur la variété symplectique, la correspondance:

$$\xi \to i(\xi)\omega$$

établit une bijection entre les champs de vecteurs et les 1-formes différentielles dans laquelle les champs hamiltoniens correspondent aux 1-formes différentielles fermées. Le champ de vecteurs ξ est dit *strictement hamiltonien*, si la forme $i(\xi)\omega$ est *exacte*, c'est-à-dire il existe une fonction $f = f_\xi$ telle que $i(\xi)\omega + df = 0$. La fonction f est appelée le *potentiel* de ξ, qui esl défini uniquement, à l'addition d'une constante près, par ξ. Evidemment, le quotient de l'espace $\mathrm{Vect}_c(M, \omega) = H(M)$ des champs de vecteurs hamiltoniens par l'espace $H_0(M)$ des champs de vecteurs strictement hamiltoniens est isomorphe à l'espace vectoriel $H^1(M\,;\,\mathbf{R})$ de cohomologie de Rham réelle à support compact. (voir P. Hilton, S. Wylie [1]).

IV. 1.3. Soit (M, ν) une *variété unimodulaire*, c'est-à-dire, soient M une variété lisse, ν une forme différentielle non dégénérée, de degré égal à dim M, ou même ν un élément de volume. Nous désignerons par $\mathrm{Diff}_c(M,\nu)$ le sous-groupe des difféomorphismes à support compact conservant l'élément de volume ν, de $\mathrm{Diff}_c M$. Alors $\mathrm{Diff}_c(M,\nu)$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathrm{Vect}_c(M,\nu)$ composée des champs de vecteurs sans divergence:

$$\mathrm{Vect}_c(M,\nu) = \{ \xi \in \mathrm{Vect}_c M,\ L_\xi \nu = \mathrm{div}\, \xi . \nu = 0 \}$$

Soit $\xi \in \mathrm{Vect}_c(M,\nu)$, alors la $(n\text{-}1)$ -forme différentielle $i(\xi)\nu$ est fermée.

IV. 1.4. Soit (M,α) une *variété de contact,* c'est-à-dire M soit une variété de dimension impaire $2n+1$ et α soit une 1-forme différentielle telle que la forme de degré maximal $\alpha\wedge(d\alpha)^n = \alpha\wedge\underbrace{d\alpha\wedge\ldots\wedge d\alpha}_{n \text{ fois}}$ soit une forme non dégénérée. Nous désignons par $\mathrm{Diff}_c(M,\alpha)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}_c M$ composé de difféomorphismes de M transformant la forme α en la forme $\Phi.\alpha$, où Φ est une fonction qui ne s'annule en aucun point de M. Alors $\mathrm{Diff}_c(M,\alpha)$ est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathrm{Vect}_c(M,\alpha)$ composée de champs de vecteurs de contact à support compact.

$\mathrm{Vect}_c(M,\alpha) = \{\, \xi \in \mathrm{Vect}_c M\,;\ L_\xi \alpha = \psi.\alpha,\ \psi\in C^\infty(M)\}.$

Nous remarquons que, si ξ est un champ de vecteurs de contact, alors la *fonction dérivée* $f_\xi \overset{def}{=} \frac{1}{2}\alpha(\xi)$ est uniquement définie par ξ. Dans B.I. Rosenfeld [1] il y a une formule explicite pour ξ au moyen de sa fonction dérivée f_ξ.

Dans la suite, nous désignerons par G un des groupes de Lie $\mathrm{Diff}_c M$; $\mathrm{Diff}_c(M,\omega)$, $\mathrm{Diff}_c(M,\nu)$, $\mathrm{Diff}_c(M,\alpha)$ et par $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie correspondante.

IV. 1.5. Nous allons étudier la structure de l'espace dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et l'action coadjointe de G.

Considérons, tout d'abord, le cas $G = \mathrm{Diff}_c M$ et donc, $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}_c M$. Dans les coordonnées locales, chaque champ de vecteurs est de type

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Donc, chaque élément F de $\mathcal{G}^*$ est de type

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i\, dx^i,$$

où f_i sont des distributions et

$$<F,\xi> = \sum_{i=1}^{n} <f_i, \xi^i>.$$

Soient $\phi_t \in \mathrm{Diff}_c M$, $t\in\mathbf{R}$, le flot de champs de vecteurs η

$$y_t = \phi_t(x)\,,\ y = y_0 = \phi_0(x)\,.$$

Alors l'action adjointe de η dans $\mathcal{G}$ est

$$\xi \mapsto [\eta,\xi] = [\xi, -\eta] = \frac{d}{dt}\left(\xi(\phi_t^{-1}(x)\frac{\partial x}{\partial\phi_t^{-1}(x)}\right)\Big|_{t=0}$$

Alors la représentation $Ad = e^{ad}$ du groupe G est donnée par la formule

$$(Ad_\phi \xi)(x) = \xi(\phi^{-1}(x)) \frac{\partial x}{\partial \phi^{-1}(x)},$$

et l'action coadjointe G dans $\mathcal{G}^*$ est donnée par

$$K_\phi F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_i(\phi(x)) \frac{\partial \phi^i(x)}{\partial x^j} dx^j$$

Comme $\mathrm{Vect}_c(M, \omega)$, $\mathrm{Vect}_c(M, \nu)$, $\mathrm{Vect}_c(M, \alpha)$ sont les sous-algèbres de Lie fermées de $\mathrm{Vect}_c M$, chaque forme linéaire sur $\mathcal{G}$, en général, peut être prolongée par le théorème de Hahn — Banach en une forme linéaire sur $\mathrm{Vect}_c M$. Donc, on peut les écrire sous la forme d'une 1-forme différentielle aux coefficients généralisés ci-dessus, mais malheureusement pas de façon unique.

IV. 1. 6. Dans le cas où $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}_c(M, \nu)$, soient F_1 et F_2 deux prolongements d'un élément $F \in \mathcal{G}^*$. Alors $(F_1 - F_2) \mid \mathrm{Vect}_c(M, \nu) = 0$, c'est-à-dire, $F_1 - F_2$ est nulle sur chaque champ de vecteurs sans divergence. Alors $F_1 - F_2$ est une forme différentielle exacte. Alors $\mathcal{G}^*$ peut être identifiée à l'espace de cohomologies des 1-formes différentielles aux coefficients généralisés à support compact sur M.

IV. 1. 7. Dans le cas $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}_c(M, \alpha)$, on peut identifier les champs de vecteurs de contact aux fonctions dérivées $f_\xi = 1/2\alpha(\xi)$. Donc on peut identifier $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}_c(M, \alpha)$ à l'espace de L. Schwartz $\mathcal{D}(M) = C_0^\infty(M)$, et $\mathcal{G}^*$ à l'espace de distributions $\mathcal{D}'(M)$ sur M.

IV. 1. 8. Enfin, dans le cas $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}_c(M, \omega)$, la restriction d'une forme F de $\mathcal{G}^*$ sur les champs de vecteurs strictement hamiltoniens est une fonction généralisée sur M. Nous avons une application

$$F \in \mathcal{G}^* \mapsto \Phi = F|_{H_0(M)} \in D'(M)$$

Le noyau de cette application est l'espace $H_1(M, \mathbf{R})$ des formes linéaires qui sont nulles sur les champs de vecteurs strictement hamiltoniens: Chaque cycle γ dans M définit une forme linéaire F_γ

$$\langle F_\gamma, \xi \rangle = \int_\gamma i(\xi)\, \omega$$

D'après une analyse plus détaillée, A. Kirillov a obtenu une suite exacte d'espaces linéaires

$$0 \to \mathbf{R}^{b_1(M)} \to \mathcal{G}^* \to \mathcal{D}'(M) \oplus \mathbf{R}^{l(M)-1} \to 0,$$

où $b_1(M) = \dim H_1(M, \mathbf{R}) = \dim H^1(M, \mathbf{R})$ est le premier nombre de Betti et qui est fini, $l(M)$ est le *nombre des chemins à l'infini* de A. Kirillov [3].

Alors on peut identifier (non canoniquement) $\mathcal{G}^*$ à

$$\mathcal{D}'(M) \oplus \mathbf{R}^{b_1 M} \oplus \mathbf{R}^{l(M)-1} \cong \mathcal{D}'(M) \oplus \mathbf{R}^{b_1(M)+l(M)-1}.$$

IV. 1. 9. Nous revenons au cas général. Soient F un élément de $\mathcal{G}^*$, x un point de M. Nous disons que *x appartient au support de F* si, et seulement si, dans chaque voisinage U de x, il existe un élément ξ de $\mathcal{G}$ qui est nul en dehors de U et $\langle F, \xi \rangle \neq 0$.

Pour les algèbres de Lie $\mathrm{Vect}_c\, M$, $\mathrm{Vect}_c(M, \alpha)$ cette notion n'est pas nouvelle. Pour les algèbres $\mathrm{Vect}_c(M, \nu)$ et $\mathrm{Vect}_c(M, \omega)$ nous avons un phénomène nouveau. A. Kirillov [3] a prouvé les résultats suivants:

Chaque forme linéaire F de $\mathcal{G}^*$ à support vide est de type F_γ, où γ est un cycle de degré 1 pour $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}_c(M, \omega)$ et de degré $n-1$ pour le cas $\mathcal{G} = \mathrm{Vect}_c(M, \nu)$.

L'action coadjointe du groupe de Lie G dans $\mathcal{G}^*$ nous donne les K-orbites, en général, de dimension infinie. Les K-orbites de dimension finie ont été classifiées par A. Kirillov [3] :

La K-orbite Ω_F de $F \in \mathcal{G}^*$ est de dimension finie si, et seulement si, $|\mathrm{Supp}\, F| < \infty$.

Dans la suite, nous intéressons aux K-orbites de dimension finie. De plus, nous ne considérons que les variétés M telles que :

$H^1(M, \mathbf{R}) = 0$, si elle est symplectique et,

$H^{n-1}(M, \mathbf{R}) = 0$, si elle est unimodulaire.

Par conséquent, nous n'aurons pas de formes linéaires non nulles à support vide.

IV.1.10. Nous étudions la structure des K-orbites de dimension finie. Soit $M^{[k]}$ l'espace des sous-ensembles, consistant en k points distingués entre eux de M. Alors $M^{[k]}$ est une variété lisse de dimension kn, où $n = \dim M$. Nous avons une projection naturelle de Ω_F sur $M^{[k]}$:

$$F \in \Omega_F \to \mathrm{supp}\, \widetilde{F} = \{x_1, ..., x_k\} \in M^{[k]}$$

On peut sûrement écrire

$$F = \sum_{j=1}^{k} \widetilde{F}_j, \text{ où } \widetilde{F}_j \in \mathcal{G}^*, \ \text{supp } \widetilde{F}_j = \{x_j\}.$$

Nous disons que $x_i \sim x_j$ **si, et seulement si,** $\widetilde{F}_i$ **et** $\widetilde{F}_j$ **engendrent une même K-orbite** $\Omega_{\widetilde{F}_i} = \Omega_{\widetilde{F}_j}$

Supposons que l'ensemble **supp** $\widetilde{F}$ **puisse être divisé en** m **classes d'équivalence** $s_1, \ldots, s_m$, avec les **nombres des points correspondants** $|s_1| = k_1, \ldots, |s_m| = k_m$, $k_1 + \ldots + k_m = k$.

Alors la **projection** $\Omega_F \xrightarrow{p} M^{[k]}$ **peut être factorisée en diagramme commutatif**

$$\begin{array}{ccc} & & \Omega_F \\ & \swarrow & \downarrow p \\ \prod_{j=1}^{m} M^{[k_j]} & \rightarrow & M^{[k]} \end{array}$$

Comme $\Omega_{\widetilde{F}_i} = \Omega_{\widetilde{F}_{i'}}$, x_i **et** $x_{i'} \in s_j$, **les fibres des applications** $\Omega_{\widetilde{F}_i} \rightarrow M^{[1]} = M$ **sont isomorphes (plus précisément, homéomorphes) et nous les désignerons par** S_j. **Alors** la fibre de l'application $p : \Omega_F \rightarrow M^{[k]}$ **est**

$$S = \prod_{j=1}^{m} (S_j)^{k_j}$$

Donc l'étude de la K-orbite Ω_F **est réduite à l'étude des variétés** $M^{[k]}$ et S_j.

IV. 1.11. Nous rappelons les résultats prouvés (ou seulement cités) dans le travail de A. Kirillov [3].

1) Si $\pi_i(M) = 0$, *$i = 0,1,2$ et si dim* $M > 3$, *alors* $\pi_1(M^{[k]}) = S(k)$.
où par $S(k)$ *nous désignons le groupe de permutation des* k *éléments,*

$$\pi_0(M^{[k]}) = \pi_2(M^{[k]}) = 1$$

et alors $H^i(M^{[k]}) = H^i(S(k))$; $i = 0, 1, 2$.

2) Les variétés S_j *sont reliées aux K-orbites des groupes de Lie de dimension finie:*

S_j se compose des formes linéaires $\widetilde{F}_{i'}$ à support en $x_{i'} \in s_j$ et toutes les $x_{i'}$ $x_{i'}$, ou de façon équivalente $\Omega_{\widetilde{F}_i} = \Omega_{\widetilde{F}_{i'}}$. Autrement dit, $\widetilde{F}_{i'}$ peut être déduit de $\widetilde{F}_i$ par l'action du groupe stationnaire $G(x_i) \subset G$ de point x_i:

a) Si le degré F_i (comme forme linéaire sur $\mathcal{G}$) est égal à 0, alors F_i ne dépend que de la valeur du champ de vecteurs au point x_i. Alors F_i est un covecteur au point x_i. Le groupe $G(x_i)$ agit transitivement sur $T^*_{xi}M - \{0\}$. Alors $S_j \approx \mathbf{R}^n - \{0\}$

b) Si le degré de F_i est positif, nous considérons la projection canonique $\pi: \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}(x_i)^*$ qui est duale à l'injection $\mathcal{G}(x_i) \hookrightarrow \mathcal{G}$. Soit $\pi(S_j) = \Omega_j$.

Alors Ω_j est une K-orbite de $G(x_i)$, du point $\pi(F_i) \in \mathcal{G}(x_i)^*$, et $S_j = \pi^{-1}(\Omega_j)$.

IV. 1.12. Remarquons que l'orbite $\Omega_i \subset \mathcal{G}(x_i)^*$ s'est trouvée dans l'orthogonal dans $\mathcal{G}(x_i)^*$ de la sous-algèbre $\mathcal{G}^{(s)}(x_i)$, pour $s > k = \operatorname{ord} F_i$, des champs de vecteurs dont les jets de degré $l < k$ sont nuls. Alors on peut voir Ω_i comme une K-orbite du groupe de Lie de dimension finie

$G^k(x_i) = G(x_i)/G^{(k+1)}(x_i)$, $k_i = \operatorname{ord} F_i$, où $G^{(k)}(x_i)$ est le sous-groupe de $G(x_i)$ se composant des difféomorphismes ayant le contact de degré $> k$ à l'unité. On montre que le groupe $\overset{k}{G^0}(x_i)$ ne dépend pas du point x_i et de la structure de la variété M. Ils sont uniquement définis (à un isomorphisme près) par la dimension de M:

Si $G = \mathrm{Diff}_c\, M$, $G^k(x_i) \approx \mathrm{GL}^k(\mathbf{R}^n)$, le groupe des jets de degré k des difféomorphismes de $\mathbf{R}^n$ fixant l'origine.

Si $G = \mathrm{Diff}_c\,(M, v)$, $G^k(x_i) \approx \mathrm{SL}^k(\mathbf{R})$, le groupe des jets de degré k des difféomorphismes de $\mathbf{R}^n$, conservant l'élément de volume et l'origine.

Si $G = \mathrm{Diff}_c\,(M, \alpha)$, $G^k(x_i) \cong \mathrm{Ct}^k(\mathbf{R}^{2n+1})$, le groupe des jets de degré k des difféomorphismes de contact de $\mathbf{R}^{2n+1}$, fixant l'origine.

Si $G = \mathrm{Diff}_c(M, \omega)$, $G^k(x_i) \simeq \mathrm{Sp}^k(\mathbf{R}^{2n})$, le groupe des jets de dégré k des transformations canoniques de $\mathbf{R}^{2n}$, fixant l'origine.

IV. 2. REPRÉSENTATIONS DE DIMENSION FONCTIONNELLE FINIE.

Maintenant nous avons toutes les conditions nécessaires pour appliquer la construction des représentations par les K-orbites.

IV. 2.1. Comme plus haut, nous supposons que $F \in \mathcal{G}^*$, $\mathrm{supp}F = \{x_{11}, \dots x_{1k_1}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mk_m}\}$ divisée en m classes d'équivalence, au sens du §.IV.1.10,

$$S_j = \{x_{j1}, \dots, x_{jk_j}\}$$

$$F = \sum_{j=1}^{m} F_j.$$

où F_j sont les formes linéaires homogènes, c'est-à-dire,

$$F_j = \sum_{i=1}^{k_j} F_{ji}, \text{ et } \Omega_{F_{ji}} = \Omega_{F_{ji'}}, 1 \leqslant i, i' \leqslant k_j, j = 1, \dots, m \text{ et } \mathrm{supp}F_{ji} = \{x_{ji}\}.$$

IV. 2.2. Nous remarquons que la décomposition

$$F = \sum_{j=1}^{m} F_j$$

est unique et $F_j \neq F_{j'}$, si $j \neq j'$. Soient $G(F)$ le stabilisateur de F, $G(F_j)$ celui de F_j. Alors

$$G(F) \subsetneq \bigcap_{j=1}^{m} G(F_j).$$

On a bien sûr

$$\bigcap_{j=1}^{m} G(F_j) \subseteq G(F).$$

Alors $G(F) = \bigcap_{j=1}^{m} G(F_j)$.

IV. 2. 3. Supposons que $\mathrm{Ord}F = k > 1$ et $G^k(x) = R.N$ soit la décomposition du groupe des jets en parties réductive et nilpotente. Le groupe R agit librement sur les orbites génériques de N dans $\mathcal{N}^*$ (voir E. M. Andreev, E. B. Vinberg et A. G. Elasvili [1].) Alors, sur chaque orbite générique de N dans $\mathcal{N}^*$ il y a seulement une orbite unique Ω de $G^k(x)$ dans $[\mathcal{G}^k(x)]^*$.

IV. 2. 4. Supposons que toutes les formes linéaires F_{ij} se soient trouvées en position générique de $G^k(x_{ij})$ dans $[\mathcal{G}^k(x_{ij})]^*$. Alors $F_{ij}\ \mathcal{N}^k(x_{ij}) \neq 0$. Donc, il existe, d'après la théorie classique, une polarisation $\mathcal{P}_{ij}$ au point $F \mid \mathcal{N}^k(x_{ij})$ au sens de A. Kirillov — B. Kostant.

Nous posons $H(x_{ij}) = \{ g \in G(x_{ij});$ le jet J_g^k de degré k de g appartient à $\mathcal{P}_{ij}\}$

$$H_{0j} = \bigcap_{i=1}^{k_j} H(x_{ij}) \quad , \quad H_j = H_{0j} . G(F_j)$$

$$H = \prod_{j=1}^{m} H_j \ .$$

Nous avons une suite exacte

$$1 \to \prod_{j=1}^{m} H_{0j} \to H \to \prod_{j=1}^{m} S(k_j) \to 1$$

Pour les groupes de jets, nous avons une suite scindée (voir A.Kirillov [3]).

$$1 \to \prod_{j=1}^{m} H_{0j}^l \to H^l \to \prod_{j=1}^{m} S(k_j) \to 1$$

D'après celà, les représentations irréductibles de H_j^l, dont les restrictions à H_{0j}^l sont les représentations fixées de H_{0j}^l peuvent être, bien sûr, paramétrisées par les représentations irréductibles du groupe $S(k_j)$.

Soient $\pi_j \in \widehat{S(k_j)}$, $\chi_{F_{ij}}$ la représentation de $H(x_{ij})$ correspondant à la forme linéaire $F_{ij} \in \mathcal{G}^*$. La représentation du groupe H_j, qui est en réalité une représentation d'un groupe de jets H_j^l, avec $l \geq$ ord F_{kj}, et qui est construite par les données π_j et $\chi_{F_j} = \prod_{i=1}^{k_j} \chi_{F_{ij}}$, est désignée par $\sigma(\Pi_j, F_j)$.

Soit $\mathcal{H}_j$ l'algèbre de Lie (réelle) de H_j. Alors d'après la construction, on voit que

$$\left(\prod_{j=1}^{m} \mathcal{H}_j ,\ \prod_{j=1}^{m} H_j ,\ F ,\ \prod_{j=1}^{m} \sigma(\Pi_j, F_j) \right)$$

est une $\left(\prod_{j=1}^{m} \pi_j , F \right)$*-polarisation de la* K*-orbite* Ω.

En appliquant la construction générale des chapitres précédents, nous avons une représentation

$$T(\pi, F) \overset{def}{=} \mathrm{Ind}\,(G\,; \mathcal{H}_1 \times \ldots \times \mathcal{H}_m, H_1 \times \ldots \times H_m, F_1 + \ldots + F_m, \pi_1 \times \ldots \times \pi_m)$$

IV. 2.5. remarque. Le groupe fondamental de Ω_F est $\prod_{j=1}^{m} S(k_j)$. Alors les représentations correspondant à la K-orbite fixée Ω_F sont paramétrisées par le dual de $\pi_1(\Omega_F)$, comme dans le cas classique.

IV. 2. 6. THÉORÈME. 1) *Les représentations* T $(\pi,$ F) *sont justement les représentations de dimension fonctionnelle finie de A. A. Kirillov* [3]. *Donc par conséquence,*
2) *Les représentations* T $(\pi,$ F) *ne dépendent que de la K-orbite* Ω_F *et la classe d'équivalence de la représentation* π.

3) *Toutes les représentations* T $(\pi,$ F) *sont irréductibles et elles ne sont pas équivalentes l'une à l'autre, pour les couples* $(\pi,$ F) *distingués.*

L'assertion 1) est évidemment vraie d'après la construction exposée plus haut. Les assertions 2) et 3) sont de A. Kirillov [3].

V. APPENDICE A. LES INVARIANTS DÉFINISSANT LA STRUCTURE DES C*-ALGÈBRES POSTLIMINAIRES

Comme nous avons dit dans l'introduction, le problème de la description des représentations unitaires irréductibles du groupe G est une étape préliminaire pour la construction de la transformation de Fourier abstraite (non commutative) et de l'étude de la structure de l'image totale de $L^1(G)$. La description de l'image totale de Fourier de $L^1(G)$, ou même de $C^*(G)$, en définissant les fonctions sur $\widehat{G}$ à valeurs dans l'algèbre $L(H)$ des opérateurs linéaires bornés dans un espace hilbertien, se heurte à des difficultés essentielles, voir par exemple, J. M. G. Fell [3], et J. Rosenberg [1].

Nous proposons ici dans ce chapitre une autre méthode utilisant les progrès dans la théorie des K-foncteurs (co) homologiques d'après L. G. Brown-R. G. Douglas—P. A. Fillmore, G. G. Kasparov, etc... (voir, par exemple, J. Rosenberg [2]).

Soit A une C^*-algèbre postliminaire. Nous prouverons que si π est une représentation irréductible de A, alors l'élement a de A est transformé par π en un opérateur compact si et seulement si, l'élément a appartient à l'intersection des noyaux de toutes les représentations irréductibles de A, qui appartiennent faiblement à π et ne sont pas égales à π (voir §V.1). Ce résultat nous indique une méthode régulière pour construire des suites de composition à quotients liminaires pour une classe des C^*-algèbres postliminaires (voir §V. 2), contenant toutes les C^*-algèbres d'une classe des groupes résolubles et de quelques groupes localement compacts totalement discontinus analogues. Enfin, au paragraphe V. 3., nous construirons un analogue de la théorie des indices et nous montrerons que notre invariant définit uniquement, à équivalence près la structure de la C^*-algèbre A.

Les résultats sont publiés dans un article de l'auteur [2].

V. 1. IDÉAUX DE TYPE COMPACT DANS UNE C*- ALGÈBRE POSTLIMINAIRE.

Soient A une C^*-algèbre postliminaire avec élément neutre (qui peut être ajouté formellement en cas d'absence), $\widehat{A}$ son dual avec la topologie usuelle (voir A. Kirillov [1], J. Dixmier [1]). Par raison de simplicité, nous identifierons les *-représentations irréductibles (non dégénérées) aux classes d'équivalence correspondantes, i. e. les points du dual $\widehat{A}$.

Comme nous le savons, la C^*-algèbre A est postliminaire si, et seulement si, l'image de A relativement à chaque *-représentation irréductible (non dégénérée) π contient entièrement l'idéal $K(H)$ des opérateurs compacts dans l'espace hilbertien H, dans lequel la représentation π est réalisée, voir par exemple J. Dixmier [1].

V.1.1. DÉFINITION. *L'image réciproque* $K_\pi = \pi^{-1}(K(H))$ *de l'idéal* $K(H)$ *dans la* C^*-*algèbre* A *est appelée l'idéal de type compact, associé à la représentation* π.

V. 1. 2. D'après la définition V. 1. 1. on peut déduire directement, que l'idéal de type compact est toujours bilatère et fermé (donc, involutif, voir J. Dixmier [1]) dans la C*-algèbre A.

V. 1. 3. Si la représentation π n'est pas liminaire, l'idéal K_π n'est pas égal à la C*-algèbre A. Cependant A est une C*-algèbre postliminaire, alors on a $K_\pi \neq 0$. Donc, K_π est un idéal propre dans ce cas. Alors nous avons un problème intéressant qui consiste à décrire les idéaux de type compact dans le cas général.

V. 1. 4. Premièrement nous rappelons les Théorèmes de A. Rosenberg [1] et de J. M. G. Fell [1].

La *-représentation irréductible π de la C^*-algèbre A est liminaire si, et seulement si, l'ensemble réduit à un point $\{\pi\}$ est fermé dans la topologie usuelle du dual $\hat{A}$ de la C^*-algèbre A.

V. 1. 5. Nous généralisons ce résultat pour résoudre le problème indiqué dans V. 1. 3. Pour la C^*-algèbre C^* (Aff **R**) du groupe des transformations affines de la droite réelle une telle généralisation est obtenue dans le travail de l'auteur [1], voir aussi Appendice B.

Pour chaque ensemble X du dual $\widehat{A}$, nous désignerons par $\overline{X}$ la fermeture de X dans la topologie de $\widehat{A}$.

V. 1. 6. THÉORÈME. *Soient a un élément de A, π une *-représentation irréductible (non dégénérée) de A. Alors l'opérateur* $\pi(a)$ *est compact si seulement si, les opérateurs* $\pi'(a)$ *sont nuls pour chaque* π' *de la fermeture* $\overline{\{\pi\}}$, *distinct de* π.

Nous allons déduire un corollaire et faire une remarque avant de démontrer le théorème.

V. 1. 7. COROLLAIRE. *L'idéal de type compact* K_π *admet la description suivante* $K_\pi = \{a \in A\,;\, \pi'(a) = 0 \text{ pour tous } \pi' \in \overline{\{\pi\}} \setminus \{\pi\}\}$.

C'est bien une solution du problème V. 1. 3.

V. 1. 8. Remarque. L'ensemble $\{\pi\}$ est fermé si, et seulement si, l'ensemble $\overline{\{\pi\}} \setminus \{\pi\}$ est vide. Alors le théorème V. 1. 6. contient les théorèmes de A. Rosenberg et de J. M. G. Fell, cités plus haut.

V. 1. 9. Démonstration du théorème. Soit $K = K_\pi = K^{-1}(K(H))$ l'idéal de type compact associé à la représentation π. Comme nous l'avons dit, K est un idéal bilatère fermé de la C^*-algèbre postliminaire A. Et puis, la restriction de la représentation π à K est une *-représentation non nulle, parce que $\pi(K) = \boldsymbol{K}(H)$. Donc, voir J. Dixmier [1, § 3. 2. 1.), $\pi|_K \in \widehat{K}$ et π est une *-représentation liminaire de K. D'après les théorèmes de A. Rosenberg et J.M.G.Fell l'ensemble réduit à un seul point $\{\pi\}$ est fermé dans $\widehat{K}$, qui est ouvert dans $\widehat{A}$.

Soit π' appartenant à la fermeture $\overline{\{\pi\}}$ de l'ensemble $\{\pi\}$ dans $\widehat{A}$ et $\pi' \neq \pi$. D'après la proposition 3.2.1 du travail de J. Dixmier [1], si $\pi'|_K \neq 0$, on a $\pi' \in \widehat{K}$ et π' est une limite faible de π dans $\widehat{K}$ (voir J. Dixmier [1, § 3]). C'est impossible comme il est vu plus haut. Donc $\pi'|_K = 0$. Autrement dit, si $\pi(a)$ est un opérateur compact, c'est-à-dire $a \in K$, on a $\pi'(a) = 0$ pour tous les points $\pi' \in \overline{\{\pi\}} \setminus \{\pi\}$.

Inversement, supposons que $\pi'(a) = 0$ pour tous $\pi' \in \overline{\{\pi\}} \setminus \{\pi\}$. Nous devons prouver que $\pi(a)$ est un opérateur compact.

Posons. $B = \bigcap_{\substack{\pi' \in \overline{\{\pi\}} \\ \pi' \neq \pi}} \operatorname{Ker}\pi'$. Alors B est un idéal bilatère fermé dans A. Par conséquent, le dual $\widehat{B}$ de B est inclus dans le dual $\widehat{A}$ de A, comme un sous-ensemble ouvert. Plus précisément, $\widehat{B} = \widehat{A} \setminus \overline{(\overline{\{\pi\}} \setminus \{\pi\})}$.

En effet, $\widetilde{\pi} \in \overline{(\overline{\{\pi\}} \setminus \{\pi\})}$ c'est la même chose que $Ker\ \widetilde{\pi} \supset \bigcap_{\pi' \in \overline{\{\pi\}} \setminus \{\pi\}} \operatorname{Ker}\pi'$.

Alors, $\widetilde{\pi}|_B = 0$ pour toutes les représentations $\widetilde{\pi} \in \overline{\overline{\{\pi\}} \ \{\pi\}}$. Autrement dit on a

$$B = \bigcap_{\pi' \in \overline{\{\pi\}} \setminus \{\pi\}} \operatorname{Ker} \pi'$$

D'après J. Dixmier [1, § 3. 2. 2], nous avons

$$\widehat{B} = \widehat{A} \setminus \overline{\overline{\{\pi\}} \setminus \{\pi\}}.$$

Si $\pi|_B = 0$, on n'a rien à prouver.

Si $\pi|_B \neq 0$, on a $\pi \in \widehat{B}$, comme plus haut.

Comme $\widehat{B}$ est ouvert dans $\widehat{A}$, et d'après définition de B, on peut conclure que $\{\pi\}$ est fermé dans $\widehat{B}$. Alors π est une *-représentation liminaire de B. Autrement dit, si $\pi'(a) = 0$ pour tous $\pi' \in \overline{\{\pi\}} \setminus \{\pi\}$, on a $\pi(a) \in \mathcal{K}(H)$. Le théorème est prouvé.

V. 2. LA SUITE DE COMPOSITION CANONIQUE

Du théorème V. 1. 6., on déduit la manière suivante pour construire une suite de composition canonique les « bonnes » C*-algèbres postliminaires, que nous allons définir dans la suite,

V.2.1. DÉFINITION. *L'élément* $\pi \in \widehat{A}$ *est appelé* le point de degré de bordage *0, s'il n'appartient à aucune fermeture des autres points de* $\widehat{A}$ *. Désignons par* X_0 *l'ensemble de tous les points de degré de bordage 0. Le point* $\pi \in \widehat{A}$ *est dit* de degré de bordage 1, *s'il n'appartient à aucune fermeture des autres points de* $\widehat{A} \setminus X_0$ *avec la topologie induite. Désignons par* X_1 *l'ensemble de tous les points de degré de bordage 1. Le point* $\pi \in \widehat{A}$ *est dit* de degré de bordage 2, *s'il n'appartient à aucune fermeture des autres points de* $\widehat{A} - (X_0 \cup X_1)$ *avec la topologie induite, etc...*

Nous prolongeons le procédé de définition du degré de bordage des points, pourvu que $\widehat{A} - (X_0 \cap X_1 \cup \ldots) \neq \phi$.

Soit ρ un cardinal limite et supposons que pour chaque cardinal $\tilde{\rho} < \rho$, on a défini l'ensemble $X_{\tilde{\rho}}$. Nous posons $X_{\rho} = \phi$ et considérons $\widehat{A} - \bigcup\limits_{\tilde{\rho}<\rho} X_{\tilde{\rho}}$ avec la topologie induite. Si $\widehat{A} - \bigcup\limits_{\tilde{\rho}<\rho} X_{\tilde{\rho}} \neq 0$, on prolonge le procédé de définition du degré de bordage,

Nous obtenons ainsi une suite X_0, $X_1, \dots, X_\alpha$, où α est un certain cardinal; de plus, on a

$$\widehat{A} = \bigcup_{\rho<\alpha} X_\rho$$

V.2.2. DÉFINITION. Nous disons qu'une C*-algèbre a *la propriété de bordage, si $X_{\tilde{\rho}}$ est un sous-ensèmble ouvert non vide $\widehat{A} - \bigcup\limits_{\rho'<\rho} X_{\rho}$, pourvu que $\tilde{\rho}$ soit un cardinal non limite, $0 \leqslant \tilde{\rho} < \alpha$ et $\widehat{A} - \bigcup\limits_{\rho'<\rho} X_{\rho'} \neq \phi$.*

Nous voyons que l'ensemble des C*-algèbres postliminaires avec la propriété de bordage est assez riche. En particulier, toutes les C^*-algèbres $C^*(G)$ des groupes localement compacts G apparus dans les paragraphes §§1—4 du travail de J. Rosenberg [1] dans les travaux de l'auteur et dans l'Appendice B de ce travail sont de tels ensembles.

V.2.3. Nous posons $\mathscr{E}_\rho = \bigcap\limits_{\pi \in A_\rho} \operatorname{Ker} \pi$, où

$$A_\rho = \widehat{A} - \bigcup_{\rho'<\rho} X_{\rho'}, \text{ pour } \rho > 0,\ A_0 = \widehat{A}$$

THÉORÈME. *Soit* A *une C^*-algèbre postliminaire avec la propriété de bordage. Alors*

a) Tous les $\mathscr{E}_0$, $\mathscr{E}_1, \dots, \mathscr{E}_\alpha$ sont des idéaux bilatères fermés,

b) pour chaque ordinal ρ, $0 \leq \rho \leq \alpha$,

$$\widehat{\mathscr{E}}_\rho = \bigcup_{\tilde{\rho}<\rho} X_{\tilde{\rho}}$$

c) on a

$$\{0\} = \mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}_1 \subset \mathscr{E}_2 \subset \dots \subset \mathscr{E}_\alpha = \mathrm{A}$$

d) pour chaque ordinal ρ, $0 \leq \rho \leq \alpha$, la C^*-algèbre quotient $\mathscr{E}_{\rho+1} / \mathscr{E}_\rho$ est liminaire. Donc pour A on a une suite de composition canonique,

Tout d'abord, nous prouvons un lemme préliminaire.

V. 2. 4. LEMME. *Soient* T *un espace topologique arbitraire,* U *un sous-ensemble ouvert de* T ; F = T $\setminus$ U, 0 *un sous-ensemble ouvert pour la topologie induite de* F. *Alors* U $\sqcup$ 0 *est ouvert dans* T.

En effet, soit x un point arbitraire de $U \sqcup 0$. Alors ou bien $x \in U$, ou bien $x \in 0$. Dans le premier cas, il existe un voisinage U_1 de x dans la topologie T, telle que $U_1 \subset U \subset U \sqcup 0$. Dans le deuxième cas il existe un voisinage ouvert 0_1 de x dans la topologie F, tel que $0_1 \subset 0 \subset U \sqcup 0$. D'après la définition de la topologie induite il existe un ouvert V dans la topologie T, tel que $V \wedge F = 0_1$. Alors $V = V \wedge T = V \wedge (U \sqcup F) = (V \wedge U) \sqcup (V \wedge F) = (V \wedge U) \sqcup 0_1 \subset \subset U \sqcup 0$. Donc dans les deux cas nous avons toujours un voisinage de x contenu dans $U \sqcup 0$. C'est-à-dire, $U \sqcup 0$ est ouvert dans la topologie de T.

V.2.5. COROLLAIRE. *Soit* A *une* C*-*algèbre postliminaire avec la propriété de bordage. Alors tous les ensembles* $\widehat{A}_\rho = A - \bigcup_{\rho' < \rho} X_{\rho'}$, *sont fermés.*

En effet, comme A est une C^*-algèbre postliminaire avec la propriété de bordage, X_ρ, $0 \leq \rho < \alpha$, sont des sous-ensembles ouverts non vides, lorsque ρ n'est pas un cardinal limite. Alors $A_1 = \widehat{A} - X_0$ est fermé. Comme X_1 est ouvert dans A_1, d'après le Lemme V. 2.4., le sous-ensemble $X_0 \cup X_1$ est ouvert, et $A_2 = \widehat{A} - (X_0 \vee X_1$ est fermé, etc...

Alors, pour chaque nombre fini $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble $X_0 \vee \dots \cup X_n$ est ouvert dans $\widehat{A}$. Pour le premier ordinal limite ω, on a $\bigcup_{\rho < \omega} X_\rho = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_n$. Alors $\bigcup_{\rho < \omega} X_\rho$ est ouvert dans $\widehat{A}$. Donc $A_\omega = \widehat{A} - \bigcup_{\rho < \omega} X_\rho$ est fermé. En prolongeant le procédé, nous prouvons que tous les A_ρ sont fermés dans $\widehat{A}$.

V. 2. 6. Enfin, nous revenons à la démonstration du théorème V. 2. 3. Comme A est une C^*-algèbre postliminaire avec la propriété de bordage, chaque ensemble X_ρ est dans $A_\rho = \widehat{A} - \bigcup_{\tilde{\rho} < \rho} X_{\tilde{\rho}}$. D'après le corollaire V. 2. 5. tous les A_ρ sont fermés. Alors, d'après la définition, tous les $\mathscr{E}_\rho = \bigcap_{\pi \in A_\rho} \operatorname{Ker} \pi$ sont des idéaux bilatères fermés et $\mathscr{E}_0 = \{0\}$, $\mathscr{E}_\alpha = A$. L'assertion a) du Théorème est prouvée.

(b) Comme $\underset{\tilde{\rho}<\rho}{\bigcup} X_{\tilde{\rho}}$ sont ouverts dans $\widehat{A}$, on a bien sûr

$$\widehat{\mathscr{C}}_\rho = \underset{\tilde{\rho}<\rho}{\bigcup} X_{\tilde{\rho}}$$

(c) Comme $A_0 = \widehat{A}$, $A_\rho = \widehat{A} - \underset{\tilde{\rho}<\rho}{\bigcup} X_{\tilde{\rho}}$, nous avons les inclusions

$$A_0 = \widehat{A} \supset A_1 \supset \ldots \supset A_\alpha = \phi,$$

D'où on déduit une suite croissante d'idéaux bilatères fermés $\mathscr{C}_\rho$.

(d) D'après la définition, on déduit

$$(\mathscr{C}_{\rho+1} / \widehat{\mathscr{C}}_\rho) = \widehat{\mathscr{C}}_{\rho+1} - \widehat{\mathscr{C}}_\rho = X_\rho.$$

Nous devons, enfin, montrer seulement que toute représentation $\pi \in (\mathscr{C}_{\rho+1} \widehat{/\mathscr{C}_\rho})$ est liminaire. En effet, $\pi \in (\mathscr{C}_{\rho+1} / \mathscr{C}_\rho)\widehat{} = X_\rho \subset A_\rho = X_\rho \sqcup A_{\rho+1}$ et, de plus, $\overline{\{\pi\}} \setminus \{\pi\} \subset A_{\rho+1}$. Comme $\mathscr{C}_{\rho+1} = \underset{\pi' \in A_{\rho+1}}{\bigcap}$ Ker π', $\{\pi\}$ est fermé dans la topologie induite de X_ρ. D'après le théorème V.1.6., la représentation π est liminaire. Le théorème est prouvé.

V.3. LES INDICES DES C^*-ALGÈBRES POSTLIMINAIRES.

Nous avons construit pour chaque C^*-algèbre postliminaire avec la propriété V.2.2 une suite de composition canonique. Maintenant, dans ce paragraphe, nous allons construire les invariants correspondants à une suite de composition fixée de ce type.

V.3.1. Soient α un cardinal fixé, $C_1, C_2, \ldots, C_\alpha$ un système de C^*-algèbres tel que $C_\rho = \{0\}$ lorsque ρ est un cardinal limite, $0 \leq \rho < \alpha$. Désignons par $\mathbf{Ext}_0 (C_1, C_2, \ldots, C_\alpha)$ l'ensemble de toutes les suites croissantes des C^*-algèbres de type

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_\alpha = A;$$

de plus,

a) toutes les C^*-algèbres E_ρ sont des idéaux bilatères fermés de A,

b) lorsque ρ est un cardinal limite, E_ρ coïncide avec la fermeture de l'idéal $\underset{\tilde{\rho}<\rho}{\bigcup} E_{\tilde{\rho}}$ dans A,

c) $E_{\rho+1} / E_\rho \cong C_{\rho+1}$, pour chaque ordinal non limite ρ, $0 \leq \rho < \alpha$.

V.3.2. Nous définissons dans l'ensemble $\mathrm{Ext}_0 (C_1, C_2, \ldots, C_\alpha)$ une relation d'équivalence. Deux suites croissantes de longueur α d'idéaux

$$\{0\} = E_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset E_\alpha = A \quad (\mathcal{A})$$
$$\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_\alpha = B \quad (\mathfrak{B})$$

sont appelées *équivalentes*, s'il existe un *-isomorphisme $\theta: A \to B$ induisant les *-isomorphismes des idéaux correspondants $\theta_i = \theta \mid_{E_i} : E_i \to F_i$.

Nous désignerons par Ext $(C_1, C_2, \ldots, C_\alpha)$ l'ensemble $\mathrm{Ext}_0 (C_1, C_2, \ldots, C_\alpha)$ factorisé par la relation d'équivalence indiquée. Le problème consiste à définir les invariants pour chaque élément de Ext $(C_1, C_2, \ldots, C_\alpha)$.

V. 3. 3. Tout d'abord, nous rappelons les notions connues (voir, par exemple, R. C. Busby [1]. Soit D une C^*-algèbre arbitraire. Alors chaque couple (T', T'') d'applications $T', T'': D \to D$ satisfaisant à la condition $xT'(y) = T''(x)y$ pour tous les $x,y \in D$, est appelé un *multiplicateur double*. Il est clair que, muni des opérations naturelles et de la norme, l'ensemble $M(D)$ des multiplicateurs doubles forme une C*-algèbre, appelée la C*-algèbre *doublement multiplicative* qui contient D comme idéal fermé. Nous désignerons par $O(D)$ la C*-algèbre $M(D)/D$ et par $\mathrm{Hom}_0 (C,O(D))$ l'ensemble de tous les *-homomorphismes de la C*-algèbre C dans $O(D)$.

Nous introduisons dans l'ensemble $\mathrm{Hom}_0 \ (C,O(D))$ la relation d'équivalence suivante. Deux éléments γ_1, γ_2 de $\mathrm{Hom}_0 (C,O(D))$ sont dits *équivalents*, s'il existe des *-isomorphismes $\omega : D \to D$ et $\sigma : C \to C$ tels que $\gamma_2 = \widehat{\omega}\, \gamma_1 \sigma^{-1}$, où $\widehat{\omega}$: $O(D) \to O(D)$ est induite par ω. Nous désignerons par Hom $(C,O(D))$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathrm{Hom}_0 \ (C,O(D))$.

V. 3. 4. Soit $\omega \in \mathrm{Hom}_0 \ (C,O(D))$ un *-homomorphisme fixé. Considérons l'ensemble

$$E_\gamma = \{(m,c) \in M(D) \times C \ ; \ \pi\,(m) = \gamma(c)\} ,$$

où π est la projection canonique de $M(D)$ sur $O(D) = M(D)/D$. Alors (Voir R. C. Busby [1]) E_γ est une C^*-algèbre. Soit μ l'immersion naturelle $D \hookrightarrow M(D)$. Désignons par E^0 l'extension « universelle » suivante

$$0 \to D \xrightarrow[\mu]{} M(D) \xrightarrow[\pi]{} O(D) \to 0$$

Nous pouvons prolonger le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & C & & \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \to & D & \xrightarrow[\mu]{} & M(D) & \xrightarrow[\pi]{} & O(D) & \to & 0 \ : E_0 \end{array}$$

pour obtenir l'extension induite par la méthode usuelle, en définissant $f : D \to E_\gamma$ et $g : E_\gamma \to C$ par les formules $f(d) = (\mu(d), O)$, $g(m,c) = c$ pour chaque élément $d \in D$, $m \in M(D)$, $c \in C$,

$$\begin{array}{ccccccccc} O & \to & D & \xrightarrow{f} & E_\gamma & \xrightarrow{g} & C & \to & O \\ & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \mathrm{pr}_1 & & \downarrow \gamma & & \\ O & \to & D & \to & M(D) & \to & O(D) & \to & O \end{array}$$

L'extension obtenue de C*-algèbres

$$O \to D \to E_\gamma \to C \to O$$

est désignée par E^0_γ, et sa classe d'équivalence dans Ext (D,C) par $[E^0_\gamma]$.

R. C. Busby [1] a prouvé le théorème suivant : l'application $[\gamma] \mapsto [E^0_\gamma]$ de l'ensemble Hom $(C, O(D))$ dans l'ensemble Ext (D,C) est bijective. Nous remarquons cependant que R. C. Busby a désigné notre Ext (C,D) par Ext (C,D)

V. 3. 5. Considérons notre ensemble Ext $(C_1, \ldots, C_\alpha)$ des classes d'équivalence des suites croissantes de C*-algèbres. D'après V. 3. 1., nous avons une extension de C*-algèbres

$$O \to E_1 \cong C_1 \to E_2 \to E_2/E_1 \cong C_2 \to O.$$

D'après V. 3. 4., il existe un élément unique $[\gamma_1] \in$ Hom $(C_2, O(C_1))$ définissant uniquement la classe d'équivalence de la suite croissante de C*-algèbres

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset E_2 .$$

Alors, à l'équivalence près, nous pouvons remplacer E_2 par $E^0_{\gamma_1}$.

Et puis considérons l'extension

$$0 \to E^0_{\gamma_1} \cong E_2 \to E_3 / E_2 \cong C_2 \to 0.$$

Alors, comme plus haut, il existe un élément $[\gamma_2] \in$ Hom $(C_3, O(E^0_{\gamma_1}))$ définissant uniquement la classe d'équivalence de la suite croissante de C*-algèbres

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset E_3 ,$$

etc...

Soit ρ un cardinal limite. Alors, d'après la définition, $E_\rho = \overline{\bigcup_{\tilde\rho < \rho} E_{\tilde\rho}}$ et E_ρ est uniquement définie par les invariants $\{[\gamma_{\tilde\rho}]\}_{\tilde\rho < \rho}$.

Puis, la suite croissante de C*-algèbres

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \ldots E_\rho \subset E_{\rho+1}$$

est définie, à équivalence près, par l'invariant

$$[\gamma_\rho] \in \mathrm{Hom}\,(C_{\rho+1}\ ,\ \mathcal{O}(\bigcup_{\tilde\rho<\rho} E^\circ_{\tilde\rho})).$$

V. 3. 6. CONCLUSION. Nous avons prouvé le résultat suivant : Pour chaque suite croissante de C^*-algèbre $A \in \mathrm{Ext}_0\,(C_1,\dots, C_\alpha)$ il existe uniquement un système d'invariants définissant, à équivalence près, la même suite $\mathcal{A}$:

$$[\gamma_1] \in \mathrm{Hom}\,(C_2\ ,\ \mathcal{O}(C_1\,))$$

$$[\gamma_2] \in \mathrm{Hom}\,(C_3\ ,\ \mathcal{O}(E^\circ_{\gamma_1}\ ))$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$[\gamma_\rho] \in \mathrm{Hom}\,(C_{\rho+1}\ ,\ \mathcal{O}(\bigcup_{\rho<\rho} E^\circ_{\gamma_\rho}\ )),\ \text{pour un ordinal limite } \rho.$$

V.3.7. DÉFINITION. *Supposons que l'algèbre A ait une suite croissante de longueur α de C^*-algèbres*

$$\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_\alpha = A \qquad (\mathcal{A})$$

Alors le système des invariants de V. 3. 6. de $\mathcal{A}$ est appelé l'indice de A et il est désigné par $Ind_\alpha\, A$.

Nous avons un résultat déjà prouvé :

V. 3. 8. THÉORÈME. *L'indice $Ind_\alpha\, A = \{[\gamma_\rho]\}_{0<\rho<\alpha}$ définit uniquement, à équivalence près, la structure de la C^*-algèbre A, possédant une suite croissante d'idéaux fermés bilatères de type ($\mathcal{A}$).*

V. 3. 9. **Remarque.** Pour les C^*-algèbres postliminaires arbitraires on a construit des suites de compositions de type CCR ou de type CT (voir J. Dixmier ([1, § 4]). Pour les C^*-algèbres avec la propriété de bordage, nous avons construit des suites de composition de type CCR d'une manière régulière (voir V. 2).

V. 3.10. **Remarque.** Pour la plus grande partie des cas connus, l'indice des C^*-algèbres de gorupes est calculé dans les gorupes des K-théories homologiques (voir Appendice B et VII.2).

V.3.11. **Remarque.** Nous avons travaillé avec aide des K-foncteurs. Il sera peut être possible d'exploiter les aspects d'algèbre homologique de Banach pour décrire la structure des C^*-algèbres. Dans son travail [4], l'auteur a introduit le foncteur suplim. Peut être les foncteurs dérivés du joncteur suplim joueront-ils un rôle important dans nos études.

En appliquant la K-théorie homologique (voir, par exemple J. Rosenberg [1,2]) à l'étude de la structure des C*-algèbres, l'auteur a suggéré une méthode des invariants topologiques (voir D. N. Ziêp [1,3,10], Chapitre V ci-dessus. et Appendice B de ce travail) dans laquelle les idéaux de type compact jouent un rôle fondamental. On a décrit dans le chapitre précédent ces idéaux d'une C*-algèbre postliminaire arbitraire en termes (algébriques) de la topologie (de Jacobson) du dual de la C*-algèbre considérée (voir théorème V. 1.6). Cette topologie étant très compliquée (voir J. Dixmier[1]), il est intéressant de simplifier le critère de compacité des éléments des C*-algèbres de groupes localement compacts.

Dans le chapitre présent, nous établissons des critères analytiques de compacité en termes de la transformation de Fourier (non commutative) des éléments des C*-algèbres de groupes topologiques localement compacts. relativement aux représentations liminaires des sous-groupes invariants. Nous ferons celà au paragraphe VI.1. Nous montrons aussi, dans le paragraphe VI.2., une application aux représentations irréductibles des groupes de Lie résolubles connexes et simplement connexes. Les critères obtenus sont vérifiés dans un travail de l'auteur [1] pour le groupe des transformations affines de la droite réelle.

Les résultats de ce chapitre sont publiés dans un travail de l'auteur [11].

VI. 1. CRITÈRES DE COMPACITÉ

VI. 1.1. Soient G un groupe localement compact dénombrable à l'infini, G_1 un sous-groupe invariant fermé de G, $X = G_1 \setminus G$ le groupe quotient (à droite) de G par G_1. A l'aide d'un choix des représentants des éléments de X dans G, en donnant une section $s: X \to G$ (qui est, dans la suite, mésurable relativement aux mesures de Haar à droite), nous avons une décomposition $g = bs(a)$, où $b = b(g)$, $a = a(g)$, pour tout g de G. Alors comme ensemble, G peut être identifié au produit cartésien $G_1 \times X$ et la loi de multiplication de G peut être définie par la formule (Voir A. Kirillov [1, §2.4]).

$$(b,a)(b', a') = (b[\alpha(a)\, b']\, \beta(a, a'), aa'),$$

où l'application $\alpha : X \to \operatorname{Aut} G_1$ est donnée par

$$\alpha(a)(b, e) = (e, a)(b, e)(e, a)^{-1}$$

et l'application $\beta: X \times X \to G_1$ est donnée par la formule

$$(e, a)(e, a') = (\beta(a, a'), aa').$$

Donc, nous pouvons choisir les mesures de Haar invariantes à droite dg, dg_1, dx sur les groupes G, G_1, X, respectivement, telles que

$dg = dg_1\ dx\, d_l\ g = (\Delta_G / \Delta_{G_1})\ (g_1)\, d_l\ g_1\ d_l\ x$, *si* $g = g_1\ s\ (x)$. Alors

$d\,(xg) / dx = (\Delta_{G_1} / \Delta_G)\,(h)$, où $s\,(x)\,g = hs\,(xg)$,

VI. 1. 2. Soit $T = \mathrm{Ind}_{G_1}^{G}\,\xi$ une représentation irréductible de G induite par une représentation liminaire ξ du sous-groupe invariant G_1 (au sens de Mackey). Alors elle peut être réalisée dans l'espace hilbertien L^2 (X,dx) des fonctions de carrés intégrables sur X à valeurs dans l'espace de la représentation ξ par la formule

$T\,(b, a)\, f\,(x) = (\Delta_{G_1} / \Delta_G)^{1/2}\,(h)\,\xi\,(h)\, f\,(xa)$, où $h = [\alpha\,(x)\ b]\ \beta\,(a, x)$ et Δ_{G_1}, Δ_G sont les fonctions modulaires des groupes G_1, G, respectivement.

VI. 1. 3. On note $\overline{S}$ la clôture d'un sous-ensemble S du dual $\widehat{G}$ de G. On utilise les mêmes lettres pour désigner les représentations de groupes et des C^*-algèbres correspondantes. En particulier, on a

$$T\,(\phi) = \int_X \int_{G_1} T\,(b, a)\ \phi\,(b, a)\ dbda,$$

pour chaque $\phi \in L^1\,(G)$.

VI. 1. 4. On peut définir une transformation de Fourier (non commutative), par exemple, pour les éléments ϕ de $L^1\,(G, dbda)$

$$\tilde{\phi}\,(x, a) = \int_{G_1} (\ \xi \cdot\ (\Delta_{G_1} / \Delta_G)^{1/2}\ )\ (\alpha\,(x)\ b)\ \phi\ (b, a)\ db.$$

Quand x parcourt X, représentations $\alpha^*\,(x)\,\xi$, où

$(\alpha^*\,(x)\,\xi)\,(b) \overset{def}{=} \xi\,(\alpha\ (x)\ b)$ parcourant une quasi-orbite $O = X.\ \xi$ dans le dual $\widehat{G}_1$ de G_1.

On peut déduire aisément que les fonctions $\|\tilde{\phi}\,(., a)\|$ et $\|\int \phi\,(., a)\,(\xi\,(\Delta_{G_1} / \Delta_G)^{1/2}(\beta\,(., a)\ R\,(a)\ da\,\|$, où R (.) est la représentation régulière à droite de X, sont semi-continues inférieurement continues quand la quasi-orbite O est séparable et, enfin, décroissantes vers zéro à l'infini de la quasi-orbite O (voir, J. Dixmier [1, § 3. 3. 2, § 3. 3. 9, § 3. 3. , 7§ 18. 2. 4])

Quand $\alpha^*\,(x)\,\xi$ tend vers le bord ∂O de la quasi-orbite O ou vers l'infini, nous avons des fonctions sur $\partial\, O \cup \infty$ que nous désignerons par $\tilde{\phi}\,(., a)\ |\ \partial\, O \cup \infty$ etc...

VI.1.5. Soient $\zeta \in \partial O$ et $\omega = G.\zeta$ la quasi-orbite de ξ, τ une représentation irréductible du stabilisateur G_ζ du point ζ sous l'action de G, dont la restriction au sous-groupe G_1 soit un multiple de ζ. On pose $T^{\omega,\tau} = \mathrm{Ind}_{G_\zeta}^{G}(\tau)$, qui est irréductible, d'après la théorie de Mackey des représentations irréductibles des groupes ayant un sous-groupe invariant.

Supposons, ensuite, que notre quasi-orbite O soit séparable. Nous notons comme toujours, par tr la trace, si elle existe; des opérateurs ou des représentations. En particulier, nous avons

$$\mathrm{tr}\,\check{\phi}(x,a) = \mathrm{tr}\int (\xi\,(\Delta G_1/\Delta_G)^{1/2}\,(\alpha(x)\,b)\,\phi(b,a)\,db$$

VI.1.6. THÉORÈME. *Pour chaque élément ϕ de $L^1(G)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $T(\phi)$ est un opérateur compact.

(2) $S(\phi) = 0$, pour tous $S \subset \{\overline{T}\}$ et $S \neq T$

(3) $T^{\omega,\tau}(\phi) = 0$, pour toute l'orbite $\omega \subset \partial O$ et pour toute représentation τ dont la restriction au sous-groupe G_1 est $\tau|_{G_1} = \mathrm{mult}\ \xi$.

(4) $\mathrm{Ind}_{G_1}^{G_\zeta}(\phi) = 0$, pour tout point ζ de ∂O.

(5) $\tilde{\phi}(.,a)|_{\partial O} = 0$ pour presque tout a.

(6) $\int_X \tilde{\phi}(.,a)\,(\xi\,(\Delta_{G_1}/\Delta_G)^{1/2})\,(\beta(.,a))\,R(a)\,da\,|_{\partial O} = 0$

(7) $\mathrm{tr}\int_X \tilde{\phi}(.,a)\,(\xi\,(\Delta_{G_1}/\Delta_G)^{1/2})\,(\beta(.,a))\,R(a)\,da\,|_{\partial O} = 0$, si la dernière expression existe et, de plus, ϕ est un élément positif dans $L^1(G)$.

VI.1.7. COROLLAIRE. *Le critère de compacité ne dépend pas des fonctions $\alpha : X \to \mathrm{Aut}\,G$ et $\beta : X \times X \to G_1$.*

VI.1.8. Démonstration du théorème.

(1) $\Rightarrow$ (2) est démontré dans le chapitre précédent V.1.6.

(2) $\Rightarrow$ (3) peut être vérifié facilement en utilisant la théorie de Mackey des représentations irréductibles des groupes ayant un sous-groupe invariant, et la continuité de l'induction due à J.M.G. Fell [2]: Si $\zeta \in \partial O$, ζ est faiblement contenu dans $\{\overline{\xi}\}$, et par conséquent, $\mathrm{Ind}_{G_1}^{G}\zeta$ appartient faiblement à $\mathrm{Ind}_{G_1}^{G}\xi$.

Comme $\tau\,|_{G_1} = \text{mult}\ \zeta$, on a $\tau \in \text{Ind}_{G_1}^{G_\zeta}(\zeta)$ et $T^{\omega,\tau} =$

$$= \text{Ind}_{G_\zeta}^{G}(\tau) \in \text{Ind}_{G_\zeta}^{G}\ \text{Ind}_{G_1}^{G_\zeta}(\zeta) = \text{Ind}_{G_1}^{G_\zeta}\zeta$$

Donc $T^{\omega,\tau} \in \overline{\text{Ind}_{G_1}^{G}\zeta \in \{\text{Ind}_{G}^{G}\xi\}} = \{\bar{T}\}$.

(3) $\Rightarrow$ (4) On a bien sûr $\text{Ind}_{G_1}^{G_\zeta}\zeta\,|_{G_1} = \text{mult}\ \xi$. Alors $\text{Ind}_{G_1}^{G_\zeta}\zeta = \int^{\oplus} \tau\ d\,\mu\,(\tau)$ (intégrale directe), où l'intégrale est prise sur l'ensemble des représentations irréductibles de G_ξ dont les restrictions au sous-groupe G_1 soient des multiples de ξ, $d\,\mu\,(\tau)$ est une mesure, et enfin, $\text{Ind}_{G_1}^{G}\xi = \int^{\oplus} T^{\omega,\tau}\,d\,\mu\,(\tau)$.

(4) $\Rightarrow$ (5) est vrai grâce aux propriétés connues de la représentation régulière. En particulier, il existe une unité approchée : $\|\Phi * f_n - \Phi\|_{L^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\{f_n\}$ est une famille de fonctions de type δ.

(5) $\Rightarrow$ (6) est clair.

(6) $\Leftrightarrow$ (7) est vérifié sans difficulté : pour les opérateurs positifs, la nullité de la trace est équivalente à celle de l'opérateur.

(6) $\Rightarrow$ (1). La preuve consiste en deux lemmes suivants.

VI. 1. 9. LEMME. (*cas particulier*) *Soit* $\Phi\,(b,a) = \chi\,(b)\,\psi\,(a)$, *où* $\chi \in L^1(G_1)$,

$\tilde{\chi}\big|_{\partial_0} = 0$, $\tilde{\chi}(x) \overset{def}{=} \int_{G_1} \xi\,(\Delta_{G_1}/\Delta_G)^{1/2}\,(\alpha\,(x)\,b)\,\chi\,(b)\,db$, $\psi \in L^1(\chi)$ *et* $\|\psi\|_{L_1} \neq 0$.

Alors $T\,(\Phi)$ *est un opérateur compact.*

Preuve du lemme. On a par hypothèse

$$T\,(\Phi)\,f\,(x) = \tilde{\chi}\,(x) \int_X f\,(xa)\,(\xi\,(\Delta_{G_1}/\Delta_G)^{1/2}\,(\beta\,(x,a)\,\psi\,(a)\,da.$$

Comme X est dénombrable à l'infini, nous pouvons choisir une suite croissante de compacts l'un contenant l'autre,

$$K_n \Subset K_{n+1} \Subset O,$$

telle que $\bigcup_n K_n = O$ et les fonctions continues θ_n telles que $0 \leqslant \theta_n\,(x) \leqslant 1$

$$\theta_n\,(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in K_n \\ 0 \text{ si } x \notin K_{n+1} \end{cases}$$

Comme $\widetilde{\chi}$ est continue en x et, par hypothèse, $\widetilde{\chi} \mid_{\partial O} = 0$, l'opérateur $T(\Phi)$ peut être approché par les opérateurs A_n

$$A_n f(x) \overset{def}{=} \theta_n(x)\ \widetilde{\chi}(x) \int_X f(xa)\,(\xi\,(\Delta_{G_1}/\Delta_G)^{1/2}\,(\beta\,(x,a))\ \psi(a)\,da$$

qui sont compacts. En effet, on a

a) $\| T(\Phi) - A_n \| = \| (1-\theta_n)\,\widetilde{\chi} \int R(a)\,(\xi\,(\Delta_{G_1}/\Delta_G)^{1/2}\,(\beta\,(.,a))\ \psi(a)\,da \| \leq$

$\leq \| (1-\theta_n)\widetilde{\chi} \| \cdot \| \int R(a)\,(\xi\,(\Delta_{G_1}/\Delta_G)^{1/2}\,(\beta\,(.,a)\ \psi(a)\,da \|$, où $(1-\theta_n)\,\widetilde{\chi}$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $(1-\theta_n)\,\widetilde{\chi}$.

Comme $\widetilde{\chi}\,|_{\partial O} = 0$ et $(1-\theta_n)\,|_{K_n} = 0$, nous pouvons choisir n assez grand tel que

$\| (1-\theta_n)\widetilde{\chi} \| \cdot \| \int R(a)\,(\xi\,(\Delta_{G_1}/\Delta_G)^{1/2}\,(\beta\,(.,a))\ \psi(a)\,da \|$ soit assez petit.

b) L'opérateur A_n admet un noyau $K_n(x,a)$, dont les valeurs sont des opérateurs compacts.

$$A_n f(x) = \int K_n(x,t)\,f(t)\,dt$$

$$K_n(x,a) = \theta_n(x)\ \widetilde{\chi}(x)\,(\xi\,(\Delta_{G_1}/\Delta_G)^{1/2}\,(\beta\,(x,a))\ \psi\,(x^{-1}a)\ \Delta_X(x)$$

où Δ_X est la fonction modulaire de mesure de Haar dx sur X. Alors l'intégrale

$$\int dx \int \| K_n(x,a) \|\,da$$

converge. D'après le théorème de Fubini, l'opérateur A_n est compact. Le lemme est prouvé.

VI. 1. 10. LEMME. (Cas général). *Soit Φ un élément de $L^1(G)$ tel que $\widetilde{\Phi}(.,a)\mid_{\partial O} = 0$. Alors l'opérateur $T(\Phi)$ est compact.*

Preuve du lemme. Comme $\Phi \in L^1(G_1 \times X)$, on peut construire une approximation $\| \Phi_n - \Phi \|_{L^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, où

$$\Phi_n(b,a) = \sum_{k=1}^{N_n} \chi_k(b)\ \psi_k(a)$$

et $\chi_k \in L^1(G_1)$, $\psi_k \in L^1(X)$, $\| \psi_k \|_{L^1} \neq 0$.

Comme $\int\limits_X \widetilde{\Phi}(\cdot, a)(\xi(\Delta_{G_1} / \Delta_G)^{1/2}(\beta(\cdot, a))\, R(a)\, da \mid_{\partial 0 \cup \infty} = 0,$

on a

$$\Big\| \sum_{k=1}^{N_n} \widetilde{\chi}_k(\cdot) \int\limits_X \psi_k(a)(\xi(\Delta_{G_1} / \Delta_G)^{1/2}(\beta(\cdot, a))\, R(a)\, da \Big\|_{\partial 0 \cup \infty} =$$

$$= \Big\| \int\limits_X \widetilde{\Phi}_n(\cdot, a)(\xi(\Delta_{G_1} / \Delta_G)^{1/2}(\beta(\cdot, a))\, R(a)\, da -$$

$$- \int\limits_X \widetilde{\Phi}(\cdot, a)(\xi(\Delta_{G_1} / \Delta_G)^{1/2}(\beta(\cdot, a))\, R(a)\, da \Big\| \Big|_{\partial 0 \cup \infty} \leqq$$

$$\leqq \int\limits_X \int\limits_{G_1} | \Phi_n(b, a) - \Phi(b, a) |\, db\, da.$$

Donc $T(\Phi_n)$ peut être approché par les opérateurs A_{nm}

$$A_{mn} f(x) \overset{def}{=} \theta_m(x) \int\limits_X \widetilde{\Phi}(x, a)(\xi(\Delta_{G_1} / \Delta_G)^{1/2}(\beta(x, a))\, f(xa)\, da$$

$$\| T(\Phi_n) - A_{nm} \| = \| (1 - \theta_m(\cdot)) \times$$

$$\sum_{k=1}^{N_n} \widetilde{\chi}_k(\cdot) \int\limits_X \psi_k(a)(\zeta(\Delta_{G_1} / \Delta_G)^{1/2}(\beta(\cdot, a))\, R(a)\, da \| \xrightarrow[\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}]{} 0$$

par conséquent

$$\| T(\Phi) - A_{mn} \| \leqq \| T(\Phi) - T(\Phi_n) \| + \| T(\Phi_n) - A_{nm} \| \xrightarrow[\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}]{} 0$$

D'après le lemme VI. 1. 9., tout opérateur A_{nm} est une somme finie des opérateurs compacts. Donc $T(\Phi)$ est compact et la démonstration du théorème VI. 1. 6. est achevée.

VI. 2. APPLICATION AUX REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES DES GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES CONNEXES ET SIMPLEMENT CONNEXES.

VI. 2. 1. Pour les groupes de Lie résolubles connexes et simplement connexes de type I, la construction générale des représentations, exposée dans les chapitres I, II, III, nous donne une description totale de leurs duals, voir L. Auslander and B. Kostant [1], A. Kirillov [1], D. N. Ziêp [8], [9], [12]. Il est intéressant que pour toutes les représentations irréductibles on peut appliquer les critères de compacité.

VI. 2.2. THÉORÈME. *Pour chaque représentation irréductible* T *d'un groupe de Lie résoluble connexe et simplement de type* I, *toutes les conditions du théorème* VI.1.6. *sont satisfaites.*

En effet, la vérification des conditions du théorème VI.1.6. est contenue dans la démonstration du théorème II.4.1. de L. Auslander et B. Kostant [1]. Nous avons vu dans § III.3.1. une description totale des représentations irréductibles d'un groupe de Lie connexe et simplement connexe arbitraire G. Alors, en particulier $T \cong T^{\Omega}{}_{F,\chi_F}$ pour un point F quelconque de $\mathcal{G}^*$:

$$T \simeq T^{\Omega}{}_{F}, \chi_F = \mathrm{Ind}\,(G\,;\ \mathcal{P},\ \mathrm{H},\ \rho,\ \chi_F\,)$$

D'après §III.3.6., on a

$$T \cong \mathrm{Ind}\ (G\,;\ \mathcal{P},\ \mathrm{H},\ \rho,\ \chi_E\,) \simeq \mathrm{Ind}_A^G \xi\,,$$

où $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2$,

$A = M.N$ est le produit semi-direct, $A \lhd G$,

$\xi_1 = T^{\Omega}{}_f, \chi_f = \mathrm{Ind}\,(N\,;\ \mathcal{P}_1\ ,\rho, \chi_f)$, voir § II.3.4.

$\xi_2 = T^{\Omega_l}, \chi_l = \mathrm{Ind}\,(M\,;\ \mathcal{P}_2\ \rho,\ \chi_l\,)$

$\approx (\xi_2\,)_+\ {}^0\pi \cong \mathrm{Ind}\ (M_+\ ,(\mathcal{P}_2\,)_+\ \rho,\ \chi_{l+})^0\pi$, voir § III.3.5, ξ_1 , $(\xi_2)_+$ sont les représentations irréductibles des groupes nilpotents N, M_+ . Alors $\xi \doteq \xi_1 \otimes \xi_2$ est une représentation liminaire, est un sous-groupe invariant de G,

$T \cong T^{\Omega}{}_F\ , \chi_F \approx \mathrm{Ind}_A^G \xi$. Le théorème est prouvé.

VII. EXEMPLES. LES INVARIANTS OPOLOGIQUES DES C* - ALGÈBRE DE GROUPES.

Dans ce dernier chapitre, nous illustrons les études, exposées plus haut, dans les six précédents chapitres par des exemples concrets. Nous aurons vu la force des méthodes précédentes dans des cas particuliers.

Tout d'abord, les constructions des représentations irréductibles nous donnent la liste complète de toutes les représentations irréductibles. Puis nous analyserons la structure des C*-algèbres d'une classe assez riche de groupes localement compacts par des invariants topologiques, Les résultats obtenus se présentent sous forme d'Appendice B, qui est entièrement un article commun de l'auteur et ses collègues V.M. Son et H.H.Viet. Nous y ajoutons seulement la démonstration du théorème 3 pour compléter notre exposé!

Enfin, dans le dernier paragraphe, § VII.2., nous faisons quelques remarques sur les exemples analogues dans lesquels J. Rosenberg et G.G. Kasparov ont développé les idées de l'auteur.

VII. 1. APPENDICE B. SUR LA STRUCTURE DES C^*-ALGÈBRES DE GROUPES PAR VUONG MANH SON, HÔ HUU VIÊT ET DÔ NGOC ZIÊP

§1. INTRODUCTION

Le problème de décrire la structure des C^*-algèbres des groupes localement compacts, non compacts et non commutatifs jusqu'à ces dernières années restait encore ouvert. Il y a eu seulement un résultat de J.M.G. Fell en 1962 sur la structure de la C^*-algèbre du groupe SL(2, $\mathbf{C}$) et puis quelques résultats analogues sur les groupes SL (c,$\mathbf{R}$), Sipin (4,1) etc...

En 1972, L.G. Brown, R.G. Douglas et P.A. Fillmore [1,2] ont construit une théorie intéressante du K-foncteur homologique sur l'ensemble des classes d'équivalence des extensions (i.e. des suites exactes courtes) de C^*-algèbres.

En 1974, D.N. Ziêp [1] a donné une application de cette théorie au problème ci-dessus. L'idée est de chercher les invariants topologiques dans la K-théorie homologique sans décrire chaque élément de la C^*-algèbre comme une fonction sur le dual du groupe comme par le passé. Cette idée est ensuite développée par J. Rosenberg [1] dans des cas analogues.

Puis, en 1979, G.G. Kasparov [1] [2] [3] a généralisé le K-foncteur homologique, ce qui lui permettait, et à J. Rosenberg [2], de décrire les C^*-algèbres d'une classe de groupes plus large.

On voit qu'une C^*-algèbre peut être décrite à l'aide d'un K-foncteur convenable dans les cas où le dual du groupe a une structure topologique « assez simple ». La méthode des K-orbites nous donne des classes de tels groupes de Lie. Plus précisément, D.N. Ziêp propose de chercher des algèbres de Lie réelles résolubles ayant la propriété MD (resp., $\overline{\text{MD}}$): Toutes les K-orbites sont de dimension nulle ou maximale (resp., nulle ou égale à la dimension de l'algèbre de Lie considérée).

Dans ce travail, nous déterminons toutes les algèbres de Lie ayant la propriété $\overline{\text{MD}}$ (§2) et nous décrirons les C^*-algèbres des groupes de Lie connexes

2. 2. Dans la suite, nous considérons seulement le cas où $\mathcal{G}^1 \neq 0$, parce que si $\mathcal{G}^1 = 0$, $\mathcal{G}$ est donc commutative et par conséquent, toute K-orbite est de dimension zéro et bien sûr $\mathcal{G}$ est de classe $\overline{MD}$.

LEMME (CRITÈRE) $\overline{MD}$. *L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ satisfait à la condition $\overline{MD}$ si, et seulement si, pour tout élément non nul* X *dans $\mathcal{G}$, on a* $[X, \mathcal{G}] = \mathcal{G}^1$.

Preuve. Supposons que $\mathcal{G}$ satisfait à $\overline{MD}$. Alors pour tout F de $\mathcal{G}^*$, n'induisant pas 0 sur $\mathcal{G}^1$. on a $\dim \Omega_F = n$, d'après 2. 1. Donc $\mathcal{G}_F = \operatorname{Ker} B_F = 0$. Supposons maintenant qu'il existe un élément non nul X de $\mathcal{G}$, tel que $[X,\mathcal{G}] \nsubseteq \mathcal{G}^1$. Alors il existe un élément non nul F de $\mathcal{G}^*$ n'induisant pas 0 sur $\mathcal{G}^1$ tel que $F|_{[X,\mathcal{G}]} = 0$, autrement dit, $\langle F, [X,\mathcal{G}] \rangle = 0$ ce qui est impossible puisque $\operatorname{Ker} B_F = 0$.

Réciproquement, supposons que pour tout X non nul de $\mathcal{G}$, $[X,\mathcal{G}] = \mathcal{G}^1$. Nous montrerons que toutes les K-orbites sont de dimension zéro ou n. Remarquons que pour tout élément F de $\mathcal{G}^*$ induisant 0 dans $\mathcal{G}^1$, on a

$$\langle F, [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \rangle = \langle F, \mathcal{G}^1 \rangle = 0.$$

Donc $\operatorname{Ker} B_F = \mathcal{G} = \mathcal{G}_F$. D'où on a $\dim G_F = n$ et $\dim \Omega_F = 0$. Il suffit donc de montrer que pour tout élément non nul F de $\mathcal{G}^*$ n'induisant pas O sur $\mathcal{G}^1$ on a $\dim \Omega_F = n$.

Il est clair que si pour tout élément non nul X de $\mathcal{G}$, $[X, \mathcal{G}] = \mathcal{G}_1$. Alors $\operatorname{Ker} B_F = 0$ pour de telles formes linéaires F sur $\mathcal{G}$. Donc, $\mathcal{G}_F = \operatorname{Ker} B_F = 0$, et $\dim \Omega_F = \dim G - \dim G_F = n - 0 = n$.

2. 3. Désignons par ad^1_Y la restriction de l'opérateur ad_Y à $\mathcal{G}^1$

LEMME. *Si l'algèbre Lie $\mathcal{G}$ satisfait à la condition $\overline{MD}$ les opérateurs ad^1_Y commutent entre eux.*

Preuve. Prenons arbitrairement Y et Y' dans $\mathcal{G}$, alors d'après l'identité de Jacobi, $[Y,[Y',X]] + [Y', [X,Y]] + [X,[Y,Y']] = 0$

D'après 2. 1., pour tout $X \in \mathcal{G}^1$ $Y, Y' \in \mathcal{G}$, $[X, [Y, Y']] = 0$

D'où on a

$$[Y, [Y', X]] + [Y', [X, Y]] = 0,$$

c'est-à-dire $\mathrm{ad}_Y \circ \mathrm{ad}_{Y'} = \mathrm{ad}_{Y'} \circ \mathrm{ad}_Y$

2.4. THÉORÈME 1. *Toute algèbre de Lie réelle résoluble satisfaisant à la condition $\overline{MD}$ est isomorphe à l'une des algèbres suivantes:*

1. Une algèbre de Lie commutative,

2. L'algèbre de Lie affine réelle.

3. L'algèbre de Lie affine complexe.

La démonstration de ce théorème est assez longue, on suppose $\mathcal{G}$ non commutative et on démontre que dim $\mathcal{G}^1 = 1$ ou 2 et ensuite à étudier chaque cas.

PREMIÈRE ÉTAPE: *La dimension de $\mathcal{G}^1$ est égale à 1 ou 2.*

Preuve. Considérons la représentation ad^1 de $\mathcal{G}$ dans l'espace $\mathcal{G}^1$. Le critère $\overline{MD}$ dit exactement que cette représentation est irréductible. De plus, les opérateurs ad^1_Y, pour tous les $Y \in \mathcal{G}$, commutent entre eux, grâce au Lemme 2. 3. Il en résulte de manière classique qu'il y a une droite complexe D de $\mathcal{G}^1_{\mathbf{C}} = \mathcal{G}^1 \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C}$, stable par tous les opérateurs ad^1_Y. Si D est égale à son imaginaire conjuguée $\overline{D}$, on a $D = \delta \otimes \mathbf{C}$, où $\delta \subset \mathcal{G}^1$ est de dimension 1 stable par tous les ad^1_Y. Si $D \neq \overline{D}$, on a $D \oplus \overline{D} = \delta \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C}$, où $\delta \subset \mathcal{G}^1$ est de dimension 2 stable par les ad^1_Y. Vu l'irréductibilité, on a $\delta = \mathcal{G}^1$ dans les deux cas.

Remarque 1. Nous avons eu une démonstration trop longue de la première étape, voir par exemple le même travail dans le numéro 7, 1981, de la série des prépublications de l'Institut de Mathématique d'Hanoi. Monsieur le Professeur P. Cartier nous a fait remarquer qu'on peut abréger la démonstration de la première étape comme plus haut.

DEUXIÈME ÉTAPE. Nous démontrons maintenant les résultats suivants.

1. *Si* dim $\mathcal{G}^1 = 1$, *$\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie affine réelle* $\mathbf{R}^1 . \mathbf{R}^1$, *avec une basse* X, Y *telle que*

$$[Y, X] = X$$

2. *Si* dim $\mathcal{G}^1 = 2$, *$\mathcal{G}$ est l'algèbre de Lie affine complexe* $\mathbf{R}^2 . \mathbf{R}^2$ *avec une basse* X_1, X_2, Y_1, Y_2, *où* $X_1, X_2 \in \mathcal{G}^1$, *telle que*

$$[X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] = 0$$
$$[Y_1, X_1] = X_1 \qquad [Y_1, X_2] = X_2$$
$$[Y_2, X_1] = X_2 \qquad [Y_2, X_2] = -X_1 .$$

Remarque 2. *Si* $[Z_1, \mathcal{G}^1] = [Z_2, \mathcal{G}^1] = 0$, *où* $Z_1, Z_2 \in \mathcal{G}$, *alors* $[Z_1, Z_2] = 0$

En effet, d'après l'identité de Jacobi

$$[[Z_1, Z_2], T] + [[Z_2, T], Z_1] + [[T, Z_1], Z_2] = 0,$$

$$\forall\, T, Z_1, Z_2. \text{ Donc } [[Z_1, Z_2], T] = 0$$

pour tout T de $\mathcal{G}$, parce que $[Z_i, T] \in \mathcal{G}^1$. En raison du critère MD, $[Z_1, Z_2] = 0$.

Preuve de la deuxième étape. Soit $\mathcal{G} = \mathcal{G}^1 \oplus L$ dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie

1. *Premier cas* : $\dim \mathcal{G}^1 = 1$.

Soit X un élément non nul de $\mathcal{G}^1$, on a $\mathcal{G}^1 = \mathbf{R}\, X$ et $\mathrm{ad}_X(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^1$ (critère $\overline{\mathrm{MD}}$). D'où, on a $\mathrm{ad}_X(L) = \mathcal{G}^1$. Soit $L_1 = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_{X|L})$. Il existe un élément non nul Y de L tel que

$L = \mathbf{R}\, Y \oplus L_1$ et $[Y, X] = X$

Nous allons montrer que $L_1 = 0$. Si non, il existe un élément non nul $Y_1 \in L_1$ et $[Y_1, Y] = \lambda X$. Alors il est facile de déduire que $[Y_1 + \lambda X, \mathcal{G}] = 0$, ce qui est contraire au critère $\overline{\mathrm{MD}}$. On en déduit que dans ce cas $\mathcal{G}$ est l'algèbre de lie affine réelle ayant une base $\{X, Y\}$ telle que $[Y, X] = X$.

2. *Deuxième cas* : $\dim \mathcal{G}^1 = 2$.

– Considérons encore une fois la représentation ad^1 de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}^1$. Le critère $\overline{\mathrm{MD}}$ est exactement la condition que cette représentation est irréductible, et les opérateurs ad^1_Y commutent entre eux, pour tout Y de $\mathcal{G}$, laissant une droite complexe $D \subset \mathcal{G}^1_{\mathbf{C}} = \mathcal{G}^1 \otimes_R \mathbf{C}$ invariante, $D \neq \overline{D}$, $D \oplus \overline{D} = \mathcal{G}^1_{\mathbf{C}}$. Comme $D \neq \overline{D}$, il existe $Z \in D$ tel que $\mathrm{Re} Z = X_1 \in \mathcal{G}^1$, $X_1 \neq 0$, $\mathrm{Im} Z = X_2 \in \mathcal{G}^1$, $X_2 \neq 0$.

Comme D est invariant sous l'action ad de $\mathcal{G}$, puis comme $\mathcal{G}^1$ est commutative, nous pouvons choisir $Y_1 \in L$, tel que $\mathrm{ad}\, Y_1|_D = 1$, autrement dit

$$[Y_1, X_1] = X_1 \qquad [Y_1, X_2] = X_2 \qquad [X_1, X_2] = 0$$

Comme dans le cas non trivial (l'algèbre $\mathcal{G}$ n'est pas commutative) la dimension n de $\mathcal{G}$ est égale à la dimension des K-orbites de dimension maximale, $\mathcal{G} = \mathcal{G}^1 \oplus L$, dim $\mathcal{G}^1 = 2$ et enfin $\mathrm{ad}_{Y_1}(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$, nous avons une conclusion :

dim (Ker $\mathrm{ad}^1_{Y_1}$) est paire.

Donc, il existe un élément $Y_2 \in$ Ker (ad_{Y_1}) tel que $\mathrm{ad}^1_{Y_2} = i$, autrement dit

$$[Y_1, Y_2] = 0$$
$$[Y_2, X_1] = X_2$$
$$[Y_2, X_2] = -X_1$$

Par conséquent, on a une décomposition

$$= \underbrace{\mathbf{R}\, X_1 \oplus \mathbf{R}\, X_2}_{\mathcal{G}^1} \oplus \underbrace{\mathbf{R}\, Y_1 \oplus \mathbf{R}\, Y_2}_{L_1} \oplus L_2$$
$$= \mathcal{G}^1 \oplus L_1 \oplus L_2$$

Alors dim L_2 est paire, et si L_2 n'est pas nul, il doit être de dimension $\geqslant 2$.

Si $Y \in \mathcal{G}^1 \oplus L_2$, $\mathrm{ad}_Y(\mathcal{G}^1 \oplus L_2) = 0$

C'est pourquoi

$$\mathrm{ad}_Y : L_1 \to \mathcal{G}^1 \;,\; \forall\, Y \in \mathcal{G}^1 \oplus L_2$$

sont des épimorphismes ; Mais dim $L_1 =$ dim $\mathcal{G}^1 = 2$

donc $\mathrm{ad}_Y \in \mathrm{ISO}\,(L_1, \mathcal{G}^1)$.

On a ainsi une application linéaire

$$\mathcal{G}^1 \oplus L_2 - \{0\} \to \mathrm{ISO}\,(L_1, \mathcal{G}^1)$$

De plus, cette application est injective en raison du critère $\overline{\mathrm{MD}}$. C'est impossible, si dim $L_2 \geq 2$.

Donc $L_2 = 0$, et $\mathcal{G} = \mathcal{G}^1 \oplus L_1$

$$\mathcal{G}^1 = \{X_1, X_2\} \,,\; L_1 = \{Y_1, Y_2\}$$
$$[X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] = 0$$
$$[Y_1, X_1] = X_1,\; [Y_1, X_2] = X_2$$
$$[Y_2, X_1] = X_2,\; [Y_2, X_2] = -X_1$$

Dans ce paragraphe nous allons décrire les C*-algèbres des groupes de Lie dont les algèbres de Lie sont de classe $\overline{MD}$.

Rappelons d'abord les définitions et quelques propriétés nécessaires des K-foncteurs homologiques.

3.1. K-foncteur homologique Ext (.) (Voir L.G. Brown, R.G. Douglas — P.A. Fillmore [1]).

Soient X, un compact métrisable, $C(X)$ la C*-algèbre des fonctions complexes continues sur X, H un espace hilbertien séparable sur le corps de nombres complexes $\mathbf{C}$, $L(H)$ et $K(H)$ les C*-algèbres des opérateurs linéaires bornés et compacts, resp., dans l'espace H.

Une extension de $K(H)$ à l'aide de $C(X)$ est un couple $(\mathcal{E}, \phi)$ où $\mathcal{E}$ est une sous-C*-algèbre de $L(H)$ contenant $K(H)$ et l'opérateur identique I et ϕ et un*-homomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $C(X)$ à noyau $K(H)$.

Deux extensions $(\mathcal{E}_1, \phi_1)$ sur H_1 et $(\mathcal{E}_2, \phi_2)$ sur H_2 sont *équivalentes*, s'il existe un *-isomorphisme $\psi : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ tel que $\phi_1 \circ \psi = \phi_2$.

Une extension est donc une suite exacte courte

$$0 \to K(H) \xrightarrow{i} \mathcal{E} \xrightarrow{\phi} C(X) \to 0 \qquad (*)$$

Deux extensions sont équivalentes s'il existe un *-isomorphisme $\psi: \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K(H)_2 & \to & \mathcal{E}_2 & \to & C(X) & \to & 0 \\ & & \downarrow \psi|_{K(H_2)} & & \downarrow \psi & & \downarrow Id & & \\ 0 & \to & K(H_1) & \to & \mathcal{E}_1 & \to & C(X) & \to & 0 \end{array}$$

D'après R.C. Busby [1] (vois auss Ch.V, ci-dessus) nous avons la définition équivalente suivante:

Une extension de $K(H)$ à l'aide de $C(X)$ est un *-monomorphisme unifère τ de $C(X)$ dans l'algèbre de Calkin $\mathcal{A}(H) \overset{\text{def}}{=} L(H)/K(H)$.

Deux extensions τ_1 et τ_2 sont équivalentes, s'il existe un opérateur unitaire $U: H_1 \to H_2$ tel que $\tau_2 = \alpha_U \circ \tau_1$, où $\alpha_U : \mathcal{A}(H_1) \to \mathcal{A}(H_2)$ est l'isomorphisme intérieur induit par U.

L'extension $\tau: C(X) \hookrightarrow \mathcal{A}(H)$ est dite *triviale* s'il existe un *-monomorphisme $\sigma: C(X) \hookrightarrow L(H)$ tel que $\tau = \pi_0 \sigma$, où $\pi: L(H) \to \mathcal{A}(H) = L(H/K(H)$ est la projection canonique. C'est equivalent à la condition que la suite exacte (*) soit *scindée*.

La *somme* des extensions τ_1 sur H_1 et τ_2 sur H_2 est l'extension $\tau_1 + \tau_2$:

$C(X) \hookrightarrow \mathcal{A}(H_1 \oplus H_2)$, définie par

$(\tau_1 + (\tau_2)(f) = \tau_1(f) \oplus \tau_2(f) \in \mathcal{A}(H_1) \oplus \mathcal{A}(H_2) \hookrightarrow \mathcal{A}(H_1 \oplus H_2)$.

L. G. Brown, R. G. Douglas et P. A. Fillmore ont démontré que:

1) Pour chaque X compact métrisable, Ext'(X) est un groupe abélien dont l'élement neutre est la classe d'équivalence de l'extension triviale.

2) Ext(.) est un K-foncteur homologique. En particulier, le groupe Ext (X) ne dépend que du type homotopique de X et il existe un homomorphisme $Y_\infty: Ext(X) \to Hom(K^{-1}(X), \mathbf{Z})$ *qui sera un isomorphisme dans le cas* $X \subset \mathbf{R}^3$.

3. 2 Groupe de Kasparov et K-groupes

3. 2. 1. Groupe de Kasparov (voir G. G. Kasparov [2, 3]).

Soient A, B, E des C* -algèbres, K l'algèbre des opérateurs compacts dans un espace hilbertien. Considérons les *extensions*, c'est-à-dire, les suites exactes courtes des **C***-algèbres

$0 \to B \otimes K \to E \to A \to 0$

Deux extensions sont dites *équivalentes*, s'il existe un *-isomorphisme ψ: $E \to E'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & E_1 & & \\ 0 \to B \otimes K & \nearrow\searrow & \downarrow\psi & \searrow\nearrow & A \to 0 \\ & & E' & & \end{array}$$

L'extension est dite *triviale*, si la suite exacte courte est scindée.

D'après R. C. Busby, nous pouvons identifier chaque extension avec un $*$-homomorphisme de A dans l'algèbre extérieure multiplicative de $B \otimes K$: $\tau: A \to O(B \oplus K)$.

La somme de deux extensions τ_1 et τ_2 : $A \to O(B \otimes K)$ est l'extension

$\tau_1 \oplus \tau_2 : A \to O(B \otimes K) \oplus O(B \otimes K) \hookrightarrow O(B \otimes K) \otimes M_2 \cong O(B \otimes K)$,

où M_2 est l'algèbre de 2×2 -matrices sur $\mathbf{C}$.

Deux extensions τ_1, τ_2 sont dites *stablement équivalentes*, s'il existe deux extensions triviales σ_1, σ_2 telles que $\tau_1 + \sigma_1$ et $\tau_2 + \sigma_2$ soient équivalentes.

Quand A est nucléaire et séparable et B possède une unité approchée dénombrable, l'ensemble Ext (A, B) des classes d'extensions stablement équivalentes est un groupe abélien.

G. G. Kasparov [3] a prouvé aussi que Ext(.,.) est un K-foncteur homo-cohomologique. J. Rosenberg et C. Schochet [1] ont démontré aussi la formule de Künneth pour ces groupes.

3. 2. 2. K-groupes $K_*(A)$

Soit A une C*-algèbre avec élément unité. Par définition, $K_o(A)$ est le groupe de Grothendieck du semi-groupe des classes d'équivalences des A-modules projectifs de type fini.

Quand A n'a pas d'élément unité, on définit

$$K_o(A) = \mathrm{Ker}\,(K_o(A^+) \to K_o(\mathbf{C}) = \mathbf{Z}),$$

où l'algèbre A^+ est déduite de A par l'adjonction d'un élément unité formel. Cette définition coïncide avec celle donnée ci-dessus quand A possède un élément neutre.

Pour $A = C(X)$ avec X compact on peut identifier $K_o(A)$ avec le groupe topologique $K^o(X)$ (voir M. Karoubi [1]).

On définit les groupes $K_n(A)$ de la manière suivante

$$K_n(A) \overset{\text{def}}{=} K_o(A \otimes C_o(\mathbf{R}^n)), \quad n \geqq 0.$$

Le théorème de *périodicité de Bott* affirme que $K_o(A)$ et $K_2(A)$ sont isomorphes.

On a le théorème suivant (voir G. G. Kasparov [3] et A. Connes [1]): Pour chaque groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe G.

$$K_o(C^*(G)) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{si dim } G \text{ est paire} \\ 0, & - \quad - \quad - \text{ impaire} \end{cases}$$

$$K_1(C^*(G)) = \begin{cases} 0, & \text{si dim } G \text{ est paire} \\ \mathbf{Z}, & - \quad - \quad - \text{ impaire} \end{cases}$$

3. 2. 3, Relations entre les groupes Ext_* et K_*

Nous donnons maintenant des relations essentielles entre les groupes $\mathrm{Ext}_*(A,B)$ et $K_*(B)$. Rappelons d'abord que chaque extension

$$0 \to J \to E \to A \to 0$$

induit une suite cyclique de K-groupes

$$\begin{array}{ccc} & K_o(E) \rightarrow K_o(A) & \\ \nearrow & & \searrow \\ K_o(J) & & K_1(J) \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & K_1(A) \leftarrow K_1(E) & \end{array}$$

Si $J = B \otimes K$, $K = K(H)$, on peut identifier $K_*(J)$ et $K_*(B)$, d'après une autre définition équivalente de $K_o(.)$, le groupe $K_o(A)$ se compose des différences formelle des classes d'équivalence de projecteurs dans $A \otimes K$.

On a donc une suite exacte cyclique de la forme

$$\begin{array}{ccc} & K_o(E) \rightarrow K_o(A) & \\ \nearrow & & \searrow \\ K_o(B) & & K_1(B) \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & K_1(A) \leftarrow K_1(E) & \end{array}$$

Chaque élément de Ext (A,B) induit donc un couple d'homomorphismes des K-groupes et on ainsi un homomorphisme.

γ : Ext $(A,B) \rightarrow$ Hom $(K_o(A), K_1(B)) \oplus$ Hom $(K_1(A), K_o(B))$,

J. Rosenberg et C. Schochet [1] ont prouvé le résultat suivant:
On a la suite exacte

$0 \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}(K_0(A), K_0(B)) \oplus \mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}(K_1(A), K_1(B)) \rightarrow$ **Ext** $(A, B) \rightarrow$ Hom $(K_0(A), K_1(B)) \oplus$ **Hom** $(K_1(A), K_0(B)) \rightarrow 0$

où A et B satisfont aux conditions citées dans leur article commun.

Donc, pour décrire les C*algèbres des groupes de Lie à l'aide des K-foncteurs Ext (.), il nous faut:

1) Construire des suites exactes courtes de C*-algèbres pour la C*-algèbre C*(G).

2) Déterminer le groupe Ext puis l'indice de C* (G) dans ce groupe (voir Appendice A).

Maintenant nous allons décrire les C*-algèbres des groupes de Lie dont les algèbres de lie vérifient la condition $\overline{\mathrm{MD}}$.

A. GROUPE DES TRANSFORMATIONS AFFINES DE LA DROITE RÉELLE

Considérons le groupe des transformations affines de la droite réelle

$$G = \mathrm{Aff}\,\mathbf{R} = \{(a, b)\,;\, a \in \mathbf{R}^*,\ b \in \mathbf{R}\}$$

avec le produit

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', b + ab)$$

A. 1. LEMME (cf. I. M. Gelfand — M. A. Naimark [1]).
A équivalence près, chaque représentation unitaire irréductible de $Aff\ \mathbf{R}$ *est une des représentations deux à deux non équivalentes suivantes :*

1. Représentations unitaires U_λ^ε, $\varepsilon = 0,1$, $\chi \in \mathbf{R}$, *de dimension 1*

$$U_\lambda^\varepsilon (a, b) = |a|^{i\lambda} (sgna)^\varepsilon, \ g = (a, b) \in Aff\ \mathbf{R}.$$

2. Représentation S *dans l'espace hilbertien* $H = L_2\ (\mathbf{R}^*, d^*x)$ *où* $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$, $d^*x - dx / |x|$, $S(a, b) f(x) = e^{ibx} f(xa)$

Preuve. Il est clair que Aff $\mathbf{R} = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}$ où le point signifie le produit semi-direct. Dans ce cas, $N \cong \mathbf{R}$ est un sous-groupe invariant commutatif de Aff $\mathbf{R}$. L'espace dual $\widehat{N}$ de N est donc l'ensemble des caractères χ_λ tels que

$$\chi_\lambda (n) = e^{i\lambda n} \text{ où } n \in N, \ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Le groupe Aff $\mathbf{R}$ opère sur le dual $\widehat{N} \simeq \mathbf{R}$ par la formule

$$(g \cdot \chi_\lambda).(n) = \chi_\lambda \ (gng^{-1}) = \chi_\lambda \ (an) = \chi_{\lambda_a} (n),$$

où $g = (a, b) \in$ Aff $\mathbf{R}$. Alors $g . \chi_\lambda = \chi_{\lambda_a}$. C'est pourquoi dans $\widehat{N}$, il y a seulement deux orbites $\{0\}$ et $\mathbf{R} - \{0\}$. D'après la théorie de Mackey, l'orbite $\{0\}$ correspond à une série des représentations U_λ^ε de dimension 1 qui sont les prolongements de la représentation triviale χ_0 du sous-groupe N. La représentation unitaire irréductible de dimension infinies S correspondant à l'orbite $\mathbf{R} - \{0\}$ est induite par la représentation χ_1 de N. Dans ce cas, le stabilisateur G_{χ_1} est égal à N. Alors la représentation S est de la forme

$$S (a, b) f (x) = \exp (i\ b\ x) f (xa)$$

qui est réalisée dans l'espace hilbertien $L^2 (\mathbf{R}^*, d^*x)$.

A. 2. Nous prenons comme toujours les C*-algèbres ayant un élément unité (celui-ci peut être ajouté formellement). Comme il sera clair par la suite, la représentation S est fidèle. D'autre part, S est une représentation de type I. Donc son image contient tout l'idéal des opérateurs compacts $K(H)$, où $H = L^2 (\mathbf{R}^*, d^*x)$. Nous verrons ensuite que $C^*(\mathrm{Aff}\mathbf{R}) / K(H)$ est commutative (cf. A. 5). D'où nous avons une suite exacte courte

$$0 \to K(H) \to C^*(\mathrm{Aff}\mathbf{R}) \to C(X) \to 0$$

C'est bien l'ordre que nous allons suivre maintenant.

LEMME. *Soit* $\phi \in L^*(Aff\ \mathbf{R},\ d^*adb)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\phi \in \bigcap_{\varepsilon,\lambda} Ker\ U_\lambda^\varepsilon$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi\ (a,\ b)\ db = 0$ *presque partout pour la mesure* d^*a.

Preuve. Soit $\psi\ (a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi\ (a,\ b)\ db$. La fonction $\psi(a)$ étant une fonction sur $\mathbf{R} - \{0\}$, se décompose en la somme d'une fonction paire ψ_1 et d'une fonction impaire ψ_2 .

On a

$$\phi \in \bigcap_{\varepsilon,\lambda} \mathrm{Ker}\ U_\lambda^\varepsilon \Leftrightarrow \int_{\substack{0<|a|<+\infty \\ -\infty<b<+\infty}} \int |a|^{i\lambda}\ (\mathrm{sgn} a)^\varepsilon\ \Phi\ (a,b)\ d^*adb = 0, \forall\ \lambda, \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\int_{0<|a|<+\infty} |a|^{i\lambda}\ (\mathrm{sgn} a)^\varepsilon\ \psi(a)\ d^*a = 0\ \forall\ \lambda,\ \varepsilon$$

Comme ψ_1 est une fonction paire, ψ_2 impaire, nous avons

$$\int_{0<|a|<+\infty} |a|^{i\lambda}\ \psi_2\ (a)\ d^*a = 0, \forall\ \lambda \in \mathbf{R}$$

$$\int_{0<|a|<+\infty} |a|^{i\lambda}\ \psi_1\ (a)\ \mathrm{sgn} a\ d^*a = 0,\ \forall\ \lambda \in \mathbf{R}$$

Nous avons les conditions équivalentes

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{0<|a|<+\infty} |a|^{i\lambda}\ \psi_1\ (a)\ d^*a = 2 \int_0^{+\infty} a^{i\lambda}\ \psi_1\ (a)\ d^*a = 0,\ \forall\ \lambda \\ \displaystyle\int_{<0|a|<+\infty} |a|^{i\lambda}\psi_2\ (a)\ \mathrm{sgn} a\ d^*a = 2\int_0^{+\infty} a^{i\lambda}\psi_2\ (a)\ d^*a = 0,\ \forall\ \lambda. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{i\lambda \ln a}\ \psi_1\ (e^{\ln a})\ d\ln a = 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{i\lambda \ln a}\ \psi\ (e^{\ln a})\ d\ln a = 0 \end{cases}$$

Soit $a' = \ln a$, on a

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda a'}\ \psi_1\ (e^{a'})\ da' = 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda a'}\ \psi_2\ (e^{a'})\ da' = 0 \end{cases}$$

Or la transformation de Fourier est fidèle (sans noyau), d'où

$\psi_1 \quad (e^{a'}) = 0$ pour presque tout $a' \in \mathbf{R}$

$\psi_2 (e^{a'}) = 0$ — — — — — — — — — — —

$\psi_1(a) = 0$ pour presque tout $a > 0$

$\psi_2(a) = 0$— — — — — — — — — — $a > 0$

Car ψ_1 est paire, ψ_2 est impaire, nous avons tout de suite

$\psi(a) = 0,\ a \in \mathbf{R}$.

A.3. LEMME. *Soient* $\Phi \in L^1$ $(Aff\ \mathbf{R}, d^*adb)$ *et* $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(a,b)\ db = 0$ *presque partout pour la mesure* d^*a. *Alors* $S(\Phi)$ *est un opérateur compact, où* S *est la représentation de dimension infinie dans le lemme A.1.*

Preuve

Premier cas. Supposons que $\Phi(a,b) = \psi(a)\,\chi(b)$, *où*

$\psi \in L^1 (\mathbf{R}^*, d^*a) \cap L^2 (\mathbf{R}^*, d^*a)$, $\| \psi \|_{L^2} \neq 0$

$\chi \in L^1 (\mathbf{R}, db)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(b)db = 0$

Nous démontrerons que l'opérateur $S(\Phi)$ *qui opère dans l'espace hilbertien* $L^2 \ (\mathbf{R}^*, d^* x)$

$$[S(\Phi)f](x) = \iint \exp(ibx)\ f\ (xa)\ \Phi\ (a,b)\ d^*a\ db$$

pour $f \in L^2 (\mathbf{R}^*, d^*\ x)$ *est un opérateur compact.*

En effet

$$[S(\Phi)f]\,(x) = \widetilde{\chi}\ (x) \int_{0<|a|<+\infty} f(ax)\,\psi\,(a)\ d^*a,$$

où $\widetilde{\chi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\ (ibx).\ \chi\,(b)db$ est l'image de Fourier de $\chi \in L^1 (\mathbf{R}, db)$. Alors on a les propriétés suivantes:

a) $\widetilde{\chi}(x)$ est une fonction continue

b) $\widetilde{\chi}(x)$ tend vers zéro à l'infini.

c) $\widetilde{\chi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(b)\ db = 0$, par hypothèse.

D'où pour tout nombre positif ε , il existe un nombre $N > 0$ tel que $|\widetilde{\chi}(x)| < \varepsilon/A$ pour tout $x; |x| < \frac{1}{N}$ ou $|x| > N$,

où

$$A = (\int_{0<|a|<+\infty} |\psi(a)|^2 d^*a)^{1/2} = \|\psi\|_{L^2} \neq 0$$

Nous choisissons une fonction continue $\theta_N(.)$ telle que

$0 \leq \theta_N(x) \leq 1$, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et.

$$\theta_N(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } |x| < 1/(N+1) \text{ ou } |x| > N+1 \\ 1, \ 1/N \leq x \leq N \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{\chi}(x)[1 - \theta_N(x)]$ est donc continue et, de plus,

$\widetilde{\chi}(x)[1 - \theta_N(x)] = 0$ pour tout x tel que $1/N \leqq |x| \leqq N$ et

$|\widetilde{\chi}(x)[1 - \theta_N(x)]| \leqq \varepsilon/A$, pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Donc

$$\max_{x \in R} |\widetilde{\chi}(x)[1 - \theta_N(x)]| \leqq \varepsilon/A,$$

Nous considérons l'opérateur A_N de la forme suivante

$$(A_N f)(x) = \theta_N(x)\widetilde{\chi}(x) \int f(xa)\,\psi(a)\,d^*a$$

Alors

$$\|(S(\Phi) - A_N)f\|^2_{L^2} = \int_{0<|x|<+\infty} |(\widetilde{\chi}(x)[1 - \theta_N(x)]) \int_{0<|x|<-\infty} f(xa)\,\psi(a)\,d^*a|^2 d^*x$$

Puisque l'ensemble des fonctions lisses à support compact est dense dans $L^1(\mathbf{R}^*, d^*x) \cap L^2(\mathbf{R}^*, d^*x)$ nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer que ψ est à support compact. En posant $c = \int_{supp\psi} d^*x$

nous avons donc

$$\|(S(\Phi) - A_N)f\|^2_{L^2} \leqq c \cdot \max_{x \varepsilon \mathbf{R}} |\widetilde{\chi}(x)[1 - \theta_N(x)]|^2 \iint |f(xa)\psi(a)|^2 d^*a d^*x$$

$$\leqq c.\frac{\varepsilon^2}{A^2} \cdot \int |\psi(a)|^2 \left(\int |f(xa)|^2 d^*x\right) d^*a \leqq$$

$$\leqq c \cdot \frac{\varepsilon^2}{A^2} \cdot \int |\psi(a)|^2 d^*a \|f\|^2_{L^2} = c \cdot \varepsilon^2 \cdot \|f\|^2_{L^2}$$

D'où $\| (S(\Phi) - A_N) f \| \leq \sqrt{c} \cdot \varepsilon \cdot \| f \|$, autrement dit

$$\| S(\Phi) - A_N \| \leq \sqrt{c} \cdot \varepsilon.$$

Donc, prenant $\varepsilon = \varepsilon_N \underset{n \to \infty}{\to} 0$, nous obtenons une suite d'opérateurs A_{N_n} telle que

$$\| S(\Phi) - A_{N_n} \| \underset{n \to \infty}{\to} 0$$

C'est pourquoi il suffit de montrer que tous les opérateurs A_N sont compacts.

$$A_N f(x) = \theta_N(x) \widetilde{\chi}(x) \int f(x a) \psi(a) d^* a =$$

$$= \theta_N(x) \widetilde{\chi}(x) \int f(\xi) \psi(\xi/x) \operatorname{sgn}(\xi/x) d^* \xi$$

$$= \int K(x, \xi) f(\xi) d \xi,$$

où $K(x, \xi) = \theta_N(x) \widetilde{\chi}(x) \psi(\xi/x) \operatorname{sgn}(\xi/x)$

Nous allons vérifier maintenant que

$$\iint_{0 < |x|, |\xi| < +\infty} | K(x, \xi) |^2 d^* x \, d^* \zeta < + \infty$$

En effet

$$\int | K(x, \xi) |^2 d^* \xi = \int | \theta_N(x) \widetilde{\chi}(x) |^2 \cdot | \psi(\xi/x) |^2 d^* \xi =$$

$$= | \theta_N(x) \widetilde{\chi}(x) |^2 \| \psi \|^2_{L^2}$$

La fonction $\theta_N(x) \cdot \widetilde{\chi}(x)$ est continue et bornée donc elle est de carré intégrable. Il en résulte que

$$\int_{0 < |x| < +\infty} \left(\int_{0 < |\xi| < +\infty} | K(x, \xi) |^2 d^* \xi \right) d^* x =$$

$$\int_{0 < |x| < +\infty} | \widetilde{\chi}(x) \theta_N(x) |^2 d^* x \cdot \| \psi \|^2_{L^2} =$$

$$\int_{\frac{1}{N+1} < |x| < N+1} | \widetilde{\chi}(x) \theta_N(x) | d^* x \| \psi \|_{L^1} < + \infty$$

Donc $\iint | K(x, \xi) |^2 d^* x d^* \xi < + \infty$
en raison du théorème de Fubini. Donc A_N est compact. Ceci achève la démonstration pour le premier cas.

Deuxième cas.

Nous abordons maintenant le cas général. Soient $\Phi \in L^1(\mathrm{Aff}\ \mathbf{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(a, b) \, db = 0$ presque partout pour la mesure $d^* a$. Comme $\Phi \in$

$L^1(\mathrm{Aff}\,\mathbf{R}, d\,abd)$ elle est approchée pour la norme $\|\cdot\|_{L^1}$ par une suite de la forme

$$\widetilde{\Phi}_n(a, b) = \sum_{k=1}^{N_n} \psi_k(a)\, \chi_k(b) \xrightarrow[\|\cdot\|_{L^1}]{} \Phi(a, b)$$

où $\psi_k \in L^1(\mathbf{R}^*, d^*a)$, $\chi \in L^1(\mathbf{R}, db)$.

Puisque l'ensemble des fonctions continues **bornées** est dense en même temps dans $L^1(\mathbf{R}^*, d^*a)$ et $L^2(\mathbf{R}^*, d^*a)$, $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^1. Donc on peut supposer que $\psi_k \in L^1 \cap L^2$.

En excluant les ψ_k telles que $\|\psi_k\|_{L^2} = 0$, on peut supposer que chaque fonction ψ_k, χ_k satisfait **aux** conditions du premier **cas** sauf la condition $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_k(b)\, db = 0$. On va corriger les fonctions χ_k telles que cette condition soit satisfaite.

Soit $\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_k(b)\, db$. Donc,

$$\left|\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_k \psi_k(a)\right| = \left|\sum_{k=1}^{N_n} \psi_k(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_k(b)\, db - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(a,b)\, db\right| \leqq$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\sum_{k=1}^{N_n} \psi_k(a)\, \chi_k(b) - \Phi(a,b)\right| db.$$

On prend l'intégration par rapport à la mesure d^*a,

$$\int_{0<|a|<+\infty} \left|\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_k \psi_k(a)\right| d^*a \leqslant \iint \left|\widetilde{\Phi}_n(a, b) - \Phi(a, b)\right| d^*a\,db =$$

$$= \|\widetilde{\Phi}_n - \Phi_n\|_{L^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc

$$\int_{0<|a|<+\infty} \left|\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_k \psi_k(a)\right| d^*a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (**)$$

Soit e (.) une fonction de $L^1(\mathbf{R}, db)$ telle que

$$e(b) \geq 0,\ b \in \mathbf{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} e(b)\, db = 1.$$

On considère alors la fonction Φ_n de la forme

$$\Phi_n(a,b) = \sum_{k=1}^{N_n} \psi_k(a)\, [\chi_k(b) - \alpha_k\, e(b)].$$

On a

$$|\Phi_n(a,b) - \Phi(a,b)| \leqq \left|\sum_{k=1}^{N_n} \psi_k(a)\chi_k(b) - \Phi(a,b)\right| + \left|\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_k \psi_k(a)\right| e(b) =$$

$$= |\widetilde{\Phi}_n(a,b) - \Phi(a,b)| + \left|\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_k \psi_k(a) \cdot e(b)\right| .$$

Donc

$$\|\Phi - \Phi_n\|_{L^1} = \iint_{\substack{0<|a|<+\infty \\ -\infty< b <+\infty}} |\Phi(a,b) - \Phi_n(a,b)|\, d^*a db \leqq$$

$$\leqq \iint_{\substack{0<|a|<+\infty \\ -\infty< \quad <+\infty}} |\widetilde{\Phi}_n(a,b) - \Phi(a,b)|\, d^*a db +$$

$$+ \int_{0<|a|<+\infty} \left|\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_k \psi_k(a)\right| d^*a$$

$$= \|\widetilde{\Phi}_n - \Phi\|_{L^1} + \int_{0<|a|<+\infty} \left|\sum_{k=1}^{N_n} \alpha_k \psi_k(a)\right| d^*a \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

d'après (*) et (**). Bref, on a $\|\Phi - \Phi_n\|_{L^1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

comme $\int_{-\infty}^{+\infty} [\chi_k(b) - \alpha_k \cdot e(b)]\, db = \alpha_k - \alpha_k = 0$, pour tout k, on a donc construit une approximation de la forme.

$$\Phi_n(a,b) = \sum_{k=1}^{N_n} \psi_k(a)\, \chi_k(a) \xrightarrow[\|\cdot\|_{L^1}]{n\to\infty} \Phi(a,b), \text{ où}$$

$$\psi_k \in (L_1 \cap L_2)(\mathbf{R}^*, d\varsigma a), \|\psi_k\|_{L_2} \neq 0, \forall_k$$

$$\chi_k \in L_1(\mathbf{R}, db), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_k(b)\, db = 0, \forall_k .$$

D'après le premier cas tous les opérateurs $S(\psi_k \cdot \chi_k)$ sont compacts : Donc $S(\Phi)$ est compact. On a prouvé le lemme.

A. 4. LEMME. *La représentation de dimension finie S établit un isomorphisme des C^*-algèbres.*

$$\bigcap_{\varepsilon,\lambda} \operatorname{Ker} U^{\varepsilon}_{\lambda} \to K(H)$$

Preuve.

1) Nous montrons tout d'abord que la représentation S est fidèle, autrement dit, si $\Phi \varepsilon C^*(G)$ et $S(\Phi) = 0$, alors $\Phi = 0$ dans $C^*(G)$.

En effet, d'après le résultat de J. M. G. Fell [2] toutes les représentations U_λ^ε sont adhérentes à la représentation S dans le dual $\widehat{G}$ du groupe $G = \mathrm{Aff}\,\mathbf{R}$, c'est-à-dire, si $S(\phi) = 0$, alors $U_\lambda^\varepsilon(\phi) = 0$ $\varepsilon\forall$, $\forall\lambda$. Donc $\sup_{\pi:\widehat{G}} \|\pi(\phi)\| = 0$, i.e.

$$\|\phi\|_{C^*(G)} = 0, \text{ d'où } \phi = 0.$$

2) D'après les lemmes A. 2, A. 3, on a

$$S(\bigcap_{\varepsilon,\lambda} \operatorname{Ker} U_\lambda^\varepsilon) \subsetneq K(H).$$

Il reste à montrer que $S(\bigcap_{\varepsilon,\lambda} \operatorname{Ker} U_\lambda^\varepsilon = K(H)$.

Puisque $K(H)$ est une C^*-algèbre élémentaire (voir J. Dixmier [1]) il suffit de montrer que $S(\bigcap_{\varepsilon,\lambda} \operatorname{Ker} U_\lambda^\varepsilon)$ est un idéal fermé bilatère de $K(H)$.

Soient $K \in S(\bigcap_{\varepsilon,\lambda} \operatorname{Ker} U_\lambda^\varepsilon)$, $A \in K(H)$. Comme le groupe considéré est de type I, $S(C^*(G))$ contient tous les opérateurs compacts en raison du théorème de J. Dixmier-Glimme-Sakai. D'où il existe $\phi \in C^*(G)$ tel que $S(\phi) = A$. Soit $K = S(\phi_1)$, où $\phi_1 \in \bigcap_{\varepsilon,\lambda} \operatorname{Ker} U_\lambda^\varepsilon$. Donc

$$A.\ K = S(\phi)\, S(\phi_1) = S(\phi^* \phi_1),$$
$$K.\ A = S(\phi_1)\, S(\phi) = S(\phi_1{}^* \phi).$$

Puisque $U_\lambda^\varepsilon(\phi * \phi_1) = U_\lambda^\varepsilon(\phi)\, U_\lambda^\varepsilon(\phi_1) = 0$, $\forall\, \varepsilon, \lambda$, on a $\phi * \phi_1 \in \bigcap_{\varepsilon,\lambda} \operatorname{Ker} U_\lambda^\varepsilon$, donc $S(\phi * \phi_1) \in S(\bigcap_{\varepsilon,\lambda} \operatorname{Ker} U_\lambda^\varepsilon)$ et $A.K \in S(\bigcap_{\varepsilon,\lambda} \operatorname{Ker} U_\lambda^\varepsilon)$; D'une manière tout analogue, on a $K.\ A \in S(\bigcap_{\varepsilon,\lambda} \operatorname{Ker} U_\lambda^\varepsilon)$. D'où $S(\bigcap \operatorname{Ker} U_\lambda^\varepsilon) = K(H)$.

A. 5. THÉORÈME 2. *On a la suite exacte courte des C^*-algèbres et des *-homomorphismes.*

$$0 \to \mathrm{K}(\mathrm{H}) \to \mathrm{C}^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{R})^+ \to \mathrm{C}(\mathrm{S}^1 \vee \mathrm{S}^1) \to 0$$

Démonstration. S est fidèle, $C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{R})^+$ peut être identifiée à son image $S(C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{R}))^+)$. De plus, nous avons montré que $K(H) \cong \bigcap \operatorname{Ker} U_\lambda^\varepsilon$ est un idéal bilatère fermé. Donc nous pouvons considérer la C^*-algèbre $C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{R})^+/K(H)$. C'est une algèbre commutative ayant un élément unité.

En effet,

$$U_\lambda^\varepsilon(\phi^*\psi - \psi^*\phi) = U_\lambda^\varepsilon(\phi)\, U_\lambda^\varepsilon(\psi) - U_\lambda^\varepsilon(\psi)\, U_\lambda^\varepsilon(\phi) = 0 \ \forall\ \varepsilon, \lambda$$

D'où $\phi_* \psi - \psi_* \phi \in \bigcap_{\varepsilon,\lambda} \operatorname{Ker} U_\lambda^\varepsilon$, et par conséquent, dans l'algèbre $C^*(\mathrm{Aff}\mathbf{R})^+/$ $/K(H)$, on a $\phi_* \psi - \psi_* \phi = 0$ et $C^*(\mathrm{Aff}\mathbf{R})^+/K(H)$ est une C^*-algèbre commutative.

Il est connu que tout idéal maximal de $C^*(\mathrm{Aff}\mathbf{R})^+/K(H)$ peut être obtenu à partir d'un idéal correspondant de $C^*(\mathrm{Aff}\mathbf{R})^+$ contenant $K(H)$. D'après la description des représentations irréductibles de $C^*(\mathrm{Aff}\mathbf{R})^+$, il est clair que Spec $C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{R})^+/K(H) \approx S^1 \vee S^1$. Autrement dit, on a une suite exacte courte.

$$0 \to K(H) \to C^*(\mathrm{Aff}\mathbf{R})^+ \to C(S^1 \vee S^1) \to 0.$$

A. 6. Dès le début de ce paragraphe, nous savions que

$\mathrm{Ext}(S^1 \vee S^1) \cong \mathrm{Hom}(K^{-1}(S^1 \vee S^1), \mathbf{Z})$.

Puisque $K^{-1}(S^1 \vee S^1) \cong \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$.

on a $\mathrm{Hom}(K^{-1}(S^1 \vee S^1), \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$.

Donc $\mathrm{Ext}(S^1 \vee S^1) = \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$.

THÉORÈME 3. *La C^*algèbre $C^*(Aff\mathbf{R})$ correspond à l'élément Index $C^*(Aff\mathbf{R}) =$ $= (1,1)$ dans le groupe $Ext(S^1 \vee S^1) \cong \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$.*

La démonstration est assez longue et nous la divisons en quelques étapes successives.

A. 6. 1. Tout d'abord, nous construisons les générateurs du groupe abélien libre $\mathrm{Ext}(S^1 \vee S^1) \cong \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$. Sûrement, la compactification par un point du couple de deux droites parallèles est exactement $S^1 \vee S^1$. Alors nous pouvons énumérer les points de $S^1 \vee S^1$ par les couples des nombres (λ,ε), $\lambda \in \mathbf{R}$, $\varepsilon = 0,1$, $X = S^1 \vee S^1 = \{(\lambda,\varepsilon)\,;\, \lambda \in \mathbf{R}, \varepsilon = 0,1\} \cup \{\infty\}$.

On a bien sûr $\pi^1(S^1 \vee S^1 \overset{\mathrm{def}}{=} [S^1 \vee S^1, \mathbf{C}^*\text{-}] \simeq \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$, où $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$. Plus précisément, soient $k,l \in \mathbf{Z}$ deux nombres entiers,

$$g_{k,l}(\lambda,\varepsilon) = \begin{cases} \exp[k.i2.\mathrm{arcctg}\lambda/2], & \text{si } \varepsilon = 0, \lambda \in \mathbf{R} \\ \exp[l,i2.\mathrm{arcctg}\lambda/2], & \text{si } \varepsilon = 1, \lambda \in \mathbf{R} \\ 1, & \text{si } \lambda = \infty \end{cases}$$

Alors les classes d'homotopie $[g_{k,l}]$ des fonctions $g_{k,l}$ forment le groupe $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ à deux générateurs $[g_{0,1}]$ et $[g_{1,0}]$, $[g_{k,l}] = [g_{1,0}]^k \cdot [g_{0,1}]^l$;

A. 6. 2. Nous nous rappelons, que pour un compact métrisable arbitraire X, on a une suite exacte courte

$$0 \to \mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}(K^0(X),\mathbf{Z}) = \mathrm{Ext}(X) \xrightarrow{Y_\infty} \mathrm{Hom}(K^{-1}(X),\mathbf{Z}) \to 0$$

(voir par exemple L. G. Brown, R. G. Douglas and P. A. Fillmore [1], J. Rosenberg et C. Schohet [1]). Si $X \subset \mathbf{C}$ et $\dim X \leq 1$, l'homomorphisme Y_∞ est un isomorphisme. (voir L. G. Brown, R. G. Douglas and P. A. Fillmore [1]). Comme $X \subset \mathbf{C}$, $K^{-1}(X) = [X, GL_1] = [X, \mathbf{C}^*] = \pi^1(X)$. Soit τ une extension arbitraire $\tau : C(X) \hookrightarrow \mathcal{A}(H)$. Alors pour les éléments inversibles $g \in C(X)^*$, $\tau(g)$ sont des éléments inversibles de l'algèbre de Calkin $\mathcal{A}(H)$.

Donc, $\tau(g)$ est défini par l'indice de Fredholm et puis $\mathrm{Ind}\,\tau(g)$ n'est dépéndant que de la classe d'homotopie de $g \in C(X)^*$.

Donc, notre extension τ correspond à un homomorphisme de $\mathrm{Hom}(\pi^1(X),\mathbf{Z})$, $X = S^1 \vee S^1$, qui n'est autre que la fonction $\mathrm{Ind}\,\tau(\,.\,)$ sur $\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$,

$$\mathrm{Ind}\tau([g_{k,l}]) = k.\,\mathrm{Ind}\tau(g_{1,0}) + l.\,\mathrm{Ind}\tau(g_{0,1}).$$

Notre représentation unitaire de dimension infinie S définit une suite exacte courte

$$0 \to K(H) \to C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{R}) \xrightarrow{U_\lambda^\varepsilon} C(X) \to 0,$$

donc une extension τ.

Nous remarquons que si $\phi \in C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{R})$, et $U_\lambda^\varepsilon(\phi) = g(\lambda, \varepsilon)$, $\varepsilon = 0, 1$, $\lambda \in \mathbf{R}$, où $g \in C(S^1 \vee S^1)^*$. Alors d'après A. 4. $S(\phi)$ est ainsi un opérateur de Fredholm et de plus, $\mathrm{Ind}(S(\phi)) = \mathrm{Ind}\tau(g)$.

Donc, nous devons:

a) Construire les éléments ϕ_1, ϕ_2 *de* $C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{R})$ *tels que*

$$U_\lambda^\varepsilon(\phi_1) = g_{1,0}(\lambda,\varepsilon)$$

$$U_\lambda^\varepsilon(\phi_2) = g_{0,1}(\lambda,\varepsilon)$$

b) Calculer les indices de Fredholm $\mathrm{Ind}\,S(\phi_1) = \mathrm{Ind}\tau([g_{1,0}])$, $\mathrm{Ind}\,S(\phi_2) = \mathrm{Ind}\,\tau([g_{0,1}])$. *Notre indice cherché sera bien*

$$\mathrm{Index}\,C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{R}) = (\mathrm{Ind}\,S(\phi_1), \mathrm{Ind}\,S(\phi_2)).$$

A. 6. 3. LEMME

$$1^0)\ -2\int_{-\infty}^{+\infty} exp\,[-2\,|\,a\,| + i\,\lambda\,a]\,da = \frac{-8}{\lambda^2+4}$$

2°) $2 \int_{-\infty}^{+\infty} exp\,[-2\,|\,a\,| + i\lambda\, a]\, sgn\, a\, da = 4i \dfrac{\lambda}{\lambda^2+4}$

Preuve du lemme.

1°) $$-2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\,[2\,|\,a\,| + i\,\lambda\, a\,]\,da =$$

$$= -2 \int_{\infty -}^{+\infty} e^{-2|a|}\cos \lambda a da - 2\,i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|a|}\sin \lambda a da =$$

$$= -4 \int_0^{+\infty} e^{-2a} \cos \lambda a\, da = -4\,\mathcal{J},\ \text{où}\ \mathcal{J} = \int_0^{\infty} e^{-2a} \cos \lambda a\, da$$

Après l'intégration par parties, nous obtenons

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{4}\,\mathcal{J} \qquad \text{donc,}\ \mathcal{J} = \frac{2}{\lambda^2+4}.$$

l'assertion 2°) est prouvée de façon analogue.

A. 6. 4. LEMME.

$$exp\ [i2arccgt\,(\lambda/2)\,] - 1 = \frac{-8}{\lambda^2+4} + 4i\,\frac{\lambda}{\lambda^2+4}.$$

Preuve du lemme.

Soit $\alpha = 2\text{arcctg}\ \dfrac{\lambda}{2}$. Alors $\dfrac{\lambda}{2} = \text{ctg}\ \dfrac{\alpha}{2} = t$ et $\exp\left[\text{i}\,2arcctg\ \dfrac{\lambda}{2}\right] = e^{i\alpha} =$

$$= \cos\alpha + \text{i}\sin\alpha = \frac{t^2-1}{t^2+1} + i\,\frac{2t}{t^2+1}\quad \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + 1} + i\,\frac{2\,\frac{\lambda}{2}}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{\lambda^2-4}{\lambda^2+4} + i4\,\frac{\lambda}{\lambda^2+4}.$$

A. 6. 5. LEMME. *Soient*

$$\psi_i\,(a) = \begin{cases} 0 & ,\ \text{si}\ 1 < |\,a\,| < +\infty \\ -\,2a^2\,(\text{sgn}\ a)^{i-1} & ,\ \text{si}\ 0 < |\,a\,| \leq 1 \end{cases} \qquad i = 1, 2.$$

Alors

1°) $$\int_{0<|a|<+\infty} |\,a\,|^{i\lambda}\,\psi_1\,(a)\,da\,/\,|\,a\,| = \exp\left[\,\text{i}\,2arcctg\ \frac{\lambda}{2}\right] - 1$$

2°) $$\int_{0<|a|<+\infty} |\,a|^{i\lambda}\,\psi_1(a)\,\text{sgn}\,a\,da\,/\,|\,a\,| = 0$$

3°) $$\int_{0<|a|<+\infty} |\,a\,|^{i\lambda}\,\psi_2(a)\,da\,/\,|\,a\,| = 0$$

4°) $\int\limits_{0<|a|<+\infty} |a|^{i\lambda}\,\psi_2(a)\,\mathrm{sgn}\,a\,da/|a| = \exp\left[i\,2\,\mathrm{arc\,ctg}\,\frac{\lambda}{2}\right] - 1$

Preuve du lemme.

1°) $\int\limits_{0<|a|<+\infty} |a|^{i\lambda}\,\psi_1(a)da/|a| = -2\int\limits_{0<|a|<1} |a|^{i\lambda+2}\,da/|a| =$

$$= -4\int_0^1 a^{i\lambda+2}\,da/a = -4\int_0^1 e^{2\ln a+i\lambda\ln a}\,d\ln a = -4\int_{-\infty}^0 e^{2a'+i\lambda a'}\,da =$$

$$\int_{-\infty}^0[-2e^{2a'} + 2\mathrm{sgn}a\,.\,e^{2a'}]e^{i\lambda a'}\,da' = \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda a'}[-2e^{-2|a'|} + 2\mathrm{sgn}a'\,e^{-2|a'|}]da'$$

Comme $-2+2\mathrm{sgn}a' = 0$, $a'>0$, nous avons

$$\int_0^{+\infty} e^{i\lambda a'-2|a'|}[-2+2\mathrm{sgn}a']\,da' = 0.$$

Donc

$$\int\limits_{0<|a|<+\infty} |a|^{i\lambda}\,\psi_1(a)\,da/|a| = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda a'}[-2e^{-2|a'|} + 2e^{-2|a'|}\mathrm{sgn}a']\,da' =$$

$$= \frac{-8}{\lambda^2+4} + 4i\,\frac{\lambda}{\lambda^2+4} = \exp\,i2\mathrm{arcctg}\,\frac{\lambda}{2} - 1.$$

Les autres intégrales sont calculées de façon analogue.

A. 6. 6. LEMME *Soient* $\widetilde{\phi}_i(a,b) = \psi_i(a)\,.\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-b^2/2)$, $\phi_i = \widetilde{\phi}_i + 1$, $i=1,2$, *où 1 est l'unité de* $C^*(Aff\,\mathbf{R})$.

Alors
$$U_\lambda^\varepsilon(\phi_1) = g_{1,0}(\lambda,\varepsilon)\quad;\quad \lambda\in\mathbf{R},\ \varepsilon=0,1\,.$$
$$U_\lambda^\varepsilon(\phi_2) = g_{0,1}(\lambda,\varepsilon)\quad;\quad \lambda\in\mathbf{R},\ \varepsilon=0,1.$$

Preuve du lemme.

$$U_\lambda^\varepsilon(\widetilde{\phi}_i) = \iint\limits_{\substack{0<|a|<+\infty\\ -\infty<b<+\infty}} |a|^{i\lambda}(\mathrm{sgn}a)^\varepsilon\widetilde{\phi}_i(a,b)\,da\,db/|a| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-b^2/2)\,db\int\limits_{0<|a|<+\infty}|a|^{i\lambda}(\mathrm{sgn}\,a)^\varepsilon\,\psi_i(a)da/|a|\,.$$

A. 6. 7. Donc, nous avons cherché les fonctions ϕ_i, $i=1,2$. Il nous reste seulement à calculer les indices $\mathrm{Ind}S(\phi_i)$, $i=1,2$. Pour le faire, nous précisons tout d'abord la forme des opérateurs $S(\phi_i)$, $i=1,2$.

D'après la définition

$$[S(\widetilde{\phi}_i)\, f](x) = -\sqrt{2/\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ibx - b^2/2)\, db \int_{0<|a|\leq 1} f(xa) a^2 (\mathrm{sgn} a)^{i-1} da/|a|$$

$$= -2 \exp(-x^2/2) \int_{-1}^{1} f(xa)\, |a|\, (\mathrm{sgn} a)^{i-1}\, da$$

Donc

$$[S(\phi_i)f](x) = f(x) - 2\exp(-x^2/2) \int_{-1}^{1} f(xa)\, |a|\, (\mathrm{sgn} a)^{i-1}\, da$$

considérons les équations

$$f(x) - \exp(-x^2/2) \int_{-1}^{1} f(xa)\, |a|\, da = 0 \qquad (1)$$

$$f(x) - \exp(-x^2/2) \int_{-1}^{1} f(xa)\, a\, da = 0 \qquad (2)$$

A. 6. 8. LEMME. *Quand elle existe, chaque solution de l'équation (1) (resp., l'équation (2)) est une fonction paire (resp., impaire).*

Preuve du lemme. Soit f une solution de (1). Nous présentons f comme la somme de ses parties paire et impaire $f = f_1 + f_2$, $f_1 = (f + \check{f})/2, f_2 = (f - \check{f})/2$, $\check{f}(x) = f(-x), x \in \mathbf{R}$. Alors, pour chaque x fixé

$$\int_{-1}^{1} f_2(xa)\, |\, a\, |\, da = 0$$

Alors, d'après (1),

$$f(x) = \exp(-x^2/2) \int_{-1}^{1} f(xa)\, |\, a\, |\, da = \exp(-x^2/2) \int_{-1}^{1} f_1(xa)\, |\, a\, |\, da =$$

$$= \exp(-x^2/2) \int_{-1}^{1} f_1(-xa)\, |\, a\, |\, da = f(-x)$$

La deuxième assertion peut être prouvée par un raisonnement tout analogue.

De ce lemme, on déduit qu'on doit résoudre les équations (1) et (2) sur le domaine $0 < x < +\infty$ en les prolongeant sur le domaine $-\infty < x < 0$ par la propriété A. 6. 8.

A. 6. 9 LEMME. *Dans l'espace $L^2(\mathbf{R}^*, d^*x)$, où $d^*x = dx/|x|$, on a dim Ker $(S(\varphi_i)) = 1$, $i = 1,2$.*

Preuve du Lemme.

Pour les valeurs positives de x, les équations (1) et (2) ont un même type

$$f(x) - 4 \exp(-x^2/2) \int_0^1 f(xa)\, a\, da = 0,$$

ou même

$$f(x) = 4\, [\exp(-x^2/2)/x^2] \cdot \int_0^x \xi f(\xi)\, d\xi \tag{3}$$

Notant $F(x) = \int_0^x f(\zeta)\, \zeta\, d\zeta$, on a une équation différentielle

$$F'(x) - \frac{4 \exp(-x^2/2)}{x} F(x) = 0 \tag{4}$$

En donnant la valeur de F en un point x_o, $0 < x_o < +\infty$ nous avons de façon unique la fonction $F(x)$, et donc

$$f(x) = F'(x)/x.$$

Il nous reste seulement à voir si $f(x)$ appartient à $L^2(\mathbf{R}^*, d^* x)$.

Pour le faire, nous devons considérer $f(x)$ quand $x \to 0$ et $x \to \infty$.

Soit $f(x) = F'(x)/x$, où $F(x)$ est une solution de l'équation (4), alors

$$x^2 f(x) - 4 \exp(-x^2/2) \int_0^x f(\zeta)\, \zeta d\zeta = 0$$

ou, de manière équivalente :

$$x^2 \exp(+ x_f^2/2)\, f(x) = 4 \int_0^x f(\zeta)\, \zeta\, d\zeta$$

$$[x^2 \cdot \exp(x^2/2)\, f(x)]' = 4 f(x)\, x$$

$$\frac{[x^2 \cdot \exp(x^2/2) f(x)]'}{x^2 \exp(x^2/2)\, f(x)} = \frac{4\exp(-x^2/2)}{x}$$

$$\text{Ln}\, |\, x^2 \exp(x^2/2) f(x)\, | = 4 \int_a^x \exp(-t^2/2) d^* t + c$$

$$\sim \begin{cases} c_1 & \text{quand } x \to \infty \\ 4 \ln x + c_2 & x \to 0 \end{cases}$$

où $0 < a < +\infty$, c_1, c_2, c sont des constantes

Alors

$$x^2 \exp(x^2/2\; f(x) \sim \begin{cases} e^{c1} & \text{quand } x \to \infty \\ x^4 e^{c2} & x \to 0 \end{cases}$$

$$f(x) \sim \begin{cases} x^{-2} \exp(x^2/2) & \text{quand } x \to \infty \\ x^2 & x \to 0 \end{cases}$$

Donc cette solution f est de carré intégrable relativement à la mesure $d^* x = dx/\,|\,x\,|$ sur $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$

A.6.10. LEMME *L'image totale* $L^2(\mathbf{R}^*, d^* x)$ *relativement à l'opérateur* $S(\phi_i)$ *est dense dans* $L^2(\mathbf{R}^*, d^*x)$, *et par conséquent Coker* $S(\phi_i) = \{0\}$, $i = 1,2$.

Preuve du lemme. Nous divisons la preuve en quelques étapes.

1°) *Soient* $g(x)$ *une fonction paire et* $f(x)$ *une solution de l'équation*

$$[S(\phi_1)f](x) = f(x) - 2\exp(-x^2/2)\int_{-1}^{1} f(xa)\,|a|\,da = g(x)$$

Alors $f(x)$ *est une fonction paire.*

En effet soit $f = f_1 + f_2$ la décomposition de f à la somme des parties paire et impaire. Alors

$$\int_{-1}^{1} f_2(xa)\,|a|\,da = 0$$

et donc

$$f(x) = 2\exp(x^2/2)\int_{-1}^{1} f_1(xa)\,|a|\,da + g(x)$$

$$= 2\exp((-x)^2/2)\int_{-1}^{1} f_1(-x.a)\,|a|\,da + g(-x) = f(-x)$$

la deuxième assertion du lemme se prouve de façon analogue :

2°) soient $g(x)$ une fonction impaire, $f(x)$ une solution de l'équation

$$[S(\phi_2)f](x) = f(x) - 2\exp(-x^2/2)\int_{-1}^{1} f(xa)\,a\,da = g(x)$$

Alors $f(x)$ est une fonction impaire.

3°) Soit $g(x)$ une fonction à support compact arbitraire sur $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$, autrement dit,

$$g(x) = 0, x, |x| \leq \frac{1}{N} \text{ ou } |x| \geq N.$$

Nous montrons que les équations

$$[S(\phi_1)f](x) = g(x) \text{ et} \tag{1'}$$

$$[S(\phi_2)f](x) = g(x) \tag{2'}$$

ont toujours des solutions dans $L^2(\mathbf{R}^*, d^*x)$. Alors le lemme sera démontré.

Soit $g = g_1 + g_2$ la décomposition de g en somme de parties paire et impaire.

Alors

$$\int_{-1}^{1} g_2(xa)\,|a|\,da = 0$$

Donc on a

$$g_2(x) - 2\exp(-x^2/2)\int_{-1}^{1} g_2(xa)\,|a|\,da = g_2(x).$$

Nous cherchons les solutions de (1') en forme

$$f = \tilde{f} + g_2$$

où $\tilde{f}(x) - 2\exp(-x^2/2)\int_{-1}^{1}\tilde{f}(xa)\,|a|\,da = g_1(x)$

D'après 1⁰), $\tilde{f}(x)$ est une fonction paire. Alors

$$\tilde{f}(x) - 4\exp(-x^2/2)\int_0^1 \tilde{f}(xa)\,a\,da = g_1(x) = 0 \text{ quand } |x| \leq \frac{1}{N} \text{ ou}$$

$|x| \geq N$

Donc, en dehors de l'intervalle $\left[\frac{1}{N}, N\right]$, $\tilde{f}(x)$ est une solution paire de l'équation (1), et

$$\tilde{f}(x) \sim \begin{cases} x^{-2}\exp(-x^2/2) & \text{quand } x \to \infty \\ x^2 & \phantom{\text{quand }} x \to 0 \end{cases}$$

Comme g est à support compact, $\check{g}$ est aussi à support compact et $g_2 = (g - \check{g})/2$ est à support compact. Donc $\tilde{f} + g_2 \in L^2(\mathbf{R}^*, d^*x)$.

Remarquons que pour une fonction donnée $g(x)$, on peut écrire la solution $f(x)$ de (1') comme

$$f(x) = \tilde{f}(x) + g_2(x),$$

où $\tilde{f}$ est cherché sous la forme $\tilde{f}(x) = F'(x)/x$, où

$$F_1'(x) - \frac{4}{x}\exp(-x^2/2)\,F_1(x) = x g_2(x).$$

De façon analogue, on peut résoudre l'équation

$$[S(\Phi_2)f](x) = g(x)$$

dont la solution doit être cherchée sous la forme

$$f = \tilde{\tilde{f}} + g_1, \qquad g_1 = (g + \hat{g})/2$$

et nous avons aussi

$$\tilde{\tilde{f}}(x) \sim \begin{cases} x^{-2}\exp(-x^2/2) & \text{quand } x \to \infty \\ x^2 & \phantom{\text{quand }} x \to 0 \end{cases}$$

Le lemme, et donc le théorème A.3. est prouvé.

B. GROUPE DES TRANSFORMATIONS AFFINES DE LA DROITE COMPLEXE

B.1. $G = \text{Aff } \mathbf{C} = \{(z, w)\,;\, z, w \in \mathbf{C}, z \neq 0\}$
avec le produit habituel :

$(z,w)\,(z',w') = (zz',\, w + zw')$.

Bien entendu $\text{Aff } \mathbf{C} \cong \mathbf{C}^* . \mathbf{C}$ et $(1, \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}$ est un sous-groupe invariant commutatif.

Dans $\widehat{\mathbf{C}} \cong \mathbf{C}$, il y a deux orbites $\{0\}$ et $\mathbf{C} - \{0\}$.

Comme auparavant, *chaque représentation unitaire irréductible de* Aff C *est une des représentations suivantes* (*à équivalence près*) :

1) *Représentations unitaires* $U_{n,\lambda}$, $n \in \mathbf{Z}$, $\lambda \in \mathbf{R}$:

$U_{n,\lambda}\,(z,w) = |z|^{i\lambda} e^{in \arg z}$, $n \in \mathbf{Z}$, $\lambda \in \mathbf{R}$

2) *Représentation unitaire irréductible de dimension infinie* S *dans l'espace hilbertien* $L^2\left(\mathbf{C}^*, \dfrac{d^* r d\theta}{2\pi}\right)$, où $r = |\tilde{z}|$, $\theta = \arg \tilde{z}$, $\tilde{z} \in \mathbf{C}^*$,

$[S\,(z,w)f]\,(\tilde{z}) = \exp\,(i Re\,(w\tilde{z})\,)\;f\,(\tilde{z}z)$.

B.2. D'une manière tout analogue à la partie A nous avons *la suite exacte courte* des C^*-algèbres

$$0 \to K(H) \to C^*(\text{Aff}\,\mathbf{C})^+ \to C\,(\bigvee_{i=1}^{\infty} S^1) \to 0$$

La C^*- algèbre C^* (Aff $\mathbf{C}$) correspond à l'élément Index C^* (Aff $\mathbf{C}$) $=$ (1,1,...) dans le groupe $\text{Ext}\,(\bigvee_{i=1}^{\infty} S^1_i) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \cdots$

Le lecteur peut trouver la démonstration de ces résultats dans J. Rosenberg [1].

C. GROUPE SIMPLEMENT CONNEXE DES TRANSFORMATIONS AFFINES DE LA DROITE RÉELLE

C.1. $G = \widetilde{\text{Aff}}\,\mathbf{R} = \{(a,b)\,;\, a, b \in \mathbf{R}\}$.

Le produit est donné par la formule

$(a,b)\,(a',b') = (a + a',\, b + e^{a}\, b')$

Dans ce cas $(\text{Aff } \mathbf{R})^{\sim} \cong \mathbf{R} . \mathbf{R}$ et dans $\widehat{\mathbf{R}} \cong \mathbf{R}$ il y a trois orbites $\{0\}$, $\mathbf{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbf{R}_- = (-\infty, 0)$.

Chaque représentation unitaire irréductible est une des représentations suivantes (à équivalence près):

1. Représentation unitaire de dimension 1 U_λ, $\lambda \in \mathbf{R}$

$$U_\lambda(a, b) = e^{i\lambda a}$$

2. Représentations unitaires irréductibles de dimension infinie $S_\pm$ correspondant à l'orbite $\mathbf{R}_\pm$, resp., et réalisées dans l'espace hilbertien $H = L^2(\mathbf{R})$ par la formule

$$S_\pm(a, b) f(x) = \exp(ie^x b) f(x + a)$$

C. 2. Il est clair que la représentation $S_+ \oplus S_-$ est fidèle. Donc, d'une manière tout à fait analogue à celle de la partie A, on a

$$(S_+ \oplus S_-)(C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}}\,\mathbf{R})^+) / \bigcap_{\lambda \in \mathbf{R}} \operatorname{Ker} U_\lambda \cong C(S^1).$$

Or $\bigcap_\lambda \operatorname{Ker} U_\lambda \cong K(H_+) \oplus K(H_-)$ donc on a une suite exacte courte de la forme

$$0 \to K(H) \to C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}}\,\mathbf{R})^+ \to C(S^1) \to 0$$

Cette extension correspond à l'élément Index $C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}}\,\mathbf{R})^+ = (1,1)$ dans le groupe $\operatorname{Ext}(S^1) \oplus \operatorname{Ext}(S^1) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

D. GROUPE SIMPLEMENT CONNEXE DES TRANSFORMATIONS AFFINES DE LA DROITE COMPLEXE

D. 1. Rappelons que

$\mathrm{Aff}\,\mathbf{C} = \{(z, w)\,;\, z, w \in \mathbf{C},\ z \neq 0\} \cong \mathbf{C}^* . \mathbf{C}$

avec le produit

$$(z, w).(z', w') = (zz', w + zw')$$

Donc $\widetilde{\mathrm{Aff}}\,\mathbf{C} = \widetilde{\mathbf{C}^*.\mathbf{C}} \cong \widetilde{\mathbf{C}}^*.\,\mathbf{C} \cong \mathbf{C}\,.\,\mathbf{C}$, car $\widetilde{\mathbf{C}}^*. \cong \mathbf{C}$, où l'isomorphisme est donné par la formule

$$z \to e^z.$$

Donc $\widetilde{\mathrm{Aff}}\ \mathbf{C} = \mathbf{C}.\mathbf{C} = \{(z, w)\,;\ z, w \in \mathbf{C}\}$ avec le produit

$$(z, w).(z', w') = (z + z', w + e^z w').$$

Il est clair que $N = \{(0, w) ; w \in \mathbf{C}\} \cong \mathbf{C}$ est un sous-groupe invariant commutatif. Le groupe $\widetilde{\mathrm{Aff}}\ \mathbf{C}$ opère sur $\widehat{N} \cong \mathbf{C}$ par la formule

$$g \cdot X_\lambda = X_{e^{\bar{z}}.\lambda} \quad , \text{ où } g = (z, w).$$

Donc, dans l'espace dual $\widehat{N} \cong \mathbf{C}$, il y a deux orbites $\{0\}$ et $\mathbf{C} - \{0\}$. Les représentations de dimension 1 correspondant à l'orbite $\{0\}$ sont des prolongements de la représentation triviale, du sous-groupe invariant N. D'où l'on a une série de représentations unitaires irréductibles U_λ, $\lambda \in \mathbf{C}$

$$U_\lambda(z, w) = \exp\,(i\mathrm{Re}\,(z\lambda))\,;\ (z, w) \in \widetilde{\mathrm{Aff}}\ \mathbf{C}.$$

Prenons maintenant χ_1 dans l'orbite $\mathbf{C} - \{0\}$. Le stabilisateur G_{χ_1} est l'ensemble $\{(i2\pi n, h) ; n \in \mathbf{Z}, h \in \mathbf{C}$. Les représentations unitaires irréductibles de dimention infinie sont induites par les représentations $U \in \widehat{G}_{\chi_1}$ telles que $U \mid N \cong \chi_1$. C'est-à-dire, elles sont induites par les représentations

$$U_\theta(i\,2\pi n, h) = \exp\,(i\mathrm{Re}h + 2\pi n\theta),\ \theta \in S^1$$

Donc les représentations unitaires irréductibles sont réalisées dans l'espace hilbertien $L^2(X, dx)$, où

$$X = \widetilde{\mathrm{Aff}}\ \mathbf{C}/G_{\chi 1} \approx \mathbf{R} \times S^1$$

et elles sont de la forme $S_\theta \in (\widetilde{\mathrm{Aff}}\ \mathbf{C})\widehat{\ }$, $\theta \in S^1$

$$S_\theta\ (z, w) f\ (x) = \exp\,(i(\mathrm{Re}\,(we^x) + 2\pi\theta \left[\frac{\mathrm{Im}\,(x + z)}{2\pi}\right])) f\ (x \oplus z) \text{ où } (z,w) \in$$

$\widetilde{\mathrm{Aff}}\ \mathbf{C}$, $f \in L^2(X, dx)$, $[a]$ est la partie entière de a, et $x \oplus z \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Re}(x+z) + i2\pi\ \{\mathrm{Im}\,(x + z)/2\pi\}$, où $\{a\}$ est la partie fractionnaire de a.

D.2. D'une manière tout à fait analogue à celle des lemmes A.2., A.2., on peut prouver le

LEMME. *Les représentations de dimension infinie S_θ sont les *-homomorphismes des C^*-aglèbres*

$$\bigcap \mathrm{Ker}\ \mathrm{U}_\lambda \xrightarrow{\ \mathrm{S}_\theta\ } \mathrm{K(H)}\,,$$

où $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2\,(\mathrm{X}, \mathrm{dx})$.

D.3. Maintenant soit $\Phi \in C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}}\ \mathbf{C})$. Nous considérons l'application

$$\Phi\ (\phi)\ S^1 \to L(H),\ \Phi\,(\phi)(\theta) = S_\theta\ (\phi).$$

LEMME. Φ *est un *-homomorphisme de* $\mathrm{C}^*\,(\widetilde{\mathrm{Aff}}\ \mathbf{C})$ *dans l'espace* $\mathrm{C}\ (\mathrm{S}^1, \mathrm{L(H)})$ *des fonctions continues sur* S^1 *à valeurs dans* $\mathrm{L(H)}$.

Preuve. Puis que l'ensemble des fonctions à support compact est dense dans $C^*(\widehat{\mathrm{Aff}}\ \mathbf{C})$, il suffit de démontrer que $\Phi(\phi)(0)$ est continue en θ, pour ϕ à support compact.

Soit $c =$ mes (supp Φ) on a

$$\| \Phi(\phi)(\theta) - \Phi(\phi)(\nu) \| = \sup_{\|f\| \leq 1} \| (\Phi(\phi)(\theta) - \Phi(\phi)(\nu)) f \|^2_L$$

$$\| (\Phi(\phi)(\theta) - \Phi(\phi)(\nu) f \|^2_{L^2} = \| (S_\theta(\phi) - S_\nu(\phi) f \|^2_{L^2} =$$

$$= \int_X (\exp(iRe(we^z)) f(x \oplus z) \phi(z,w) (e^{2\pi i\theta[Im(x+z)/2\pi]} - e^{2\pi i\nu[Im(x+z)/2\pi]} x$$

$$dzdw|^2 dx \leqq \int_X (\int\int_{\mathrm{supp}\,\phi} |\phi|^2 dzdw \int\int_{\mathrm{supp}\,\phi} |f|^2 \,|\, e^{2\pi i\theta[Im(x+z)/2\pi]} -$$

$$- e^{2\pi i\nu[Im(x+z)/2\pi]}|^2 dzwd) dx = \int\int_{\mathrm{supp}\,\phi} |\phi|^2 dzdw \int_X (\int\int_{\mathrm{supp}\,\phi} |f|^2 e^{2\pi i\theta[Im(x+z)/2\pi]} -$$

$$- e^{2\pi i\nu[Im(x+z)/2\pi]}|^2 dzdw) dx = \int\int_{\mathrm{supp}\,\phi} |\phi|^2 dzdw \sup_{\substack{Imx \in S^1 \\ Imz \in \mathrm{Supp}\,\phi}} .$$

$$| e^{2\pi i\theta[Im(x+z)/2\pi]} - e^{2\pi i\nu[Im(x+z/2\pi]}|^2 \int_X \int\int_{\mathrm{supp}\,\phi} |f|^2 dzdwdx$$

En changeant les variables $y = x \oplus z$, on a

$$\int_X \int\int_{\mathrm{supp}\,\phi} |f(x \oplus z)|^2 dzdwdx = \int\int_{\mathrm{supp}\,\phi} (\int_X |f(y)|^2 dy) dzdw = c\|f\|_{L^2}$$

Donc,

$$\| (\Phi(\phi)(\theta) - \Phi(\phi)(\nu)) \|^2_{L^2} \leqq c. \int\int |\phi|^2 dzdw \,.\, \sup_{\substack{Imx \in S^1 \\ Imz \in \mathrm{Supp}\,\phi}} | e^{2\pi i\theta[\ldots]} -$$

$$e^{2\pi i\theta[\ldots]}|^2 \|f\|^2_{L^2}$$

Donc,

$$\| \Phi(\phi)(\theta) - \Phi(\phi)(\pi)) \|^2_{L^2} \leqq c. \int\int_{\mathrm{supp}\,\phi} |\phi|^2 dzdw \,.\, \sup_{\substack{Imx \in S^1 \\ Imz \in \mathrm{supp}\,\phi}} |^{2\pi i\theta[\ldots]} - e^{2\pi i\nu}[\ldots]|^2$$

Or le support de ϕ est compact et ainsi que S^1, $\sup_{\substack{Imx\ S^1 \\ Imz \in 2\mathrm{supp}}} |\ldots| \to 0$, lorsque $|\theta - \nu| \to 0$.

Enfin, on a $\| \Phi(\phi)(\theta) - \Phi(\phi)(\nu) \| \to 0$ lorsque $|\theta - \nu| \to 0$.

LEMME. Φ *est un* $^*-$ *monomorphisme des* C^*-*algèbres*

$$C^*(\widehat{Aff}\ \mathbf{C}) \hookrightarrow C(S^1, L(H)).$$

Preuve. Puisque nous n'avons pas encore de résultats sur la structure topologique du dual $C^*(\widehat{\widetilde{\mathrm{Aff}}\mathbf{C})}$ nous donnerons ici une démonstration directe du lemme.

Nous montrons que si $S_\theta(\phi) = 0$ pour toutes les valeurs $\theta \in S^1$, alors $U_\lambda(\phi) = 0$, $\forall\lambda$, autrement dit, si $\Phi(\phi) = 0$, on a $U_\lambda(\phi) = 0$, $\forall\lambda$.

Supposons que $S_\theta(\phi) = 0$, i.e. $S_\theta(\phi)\, f = 0$, $f \in L^2(X, dx)$. $X = \mathbf{R} \cdot S^1 = \{x = t + i\alpha;\ t \in \mathbf{R},\ \alpha \in S^1\}$. Prenons une fonction de la forme $f(x) = g(t) \cdot h(\alpha)$.

Nous avons

$$S_\theta(\phi)\, f(x) = \iint \exp(i\mathrm{Re}(we^x)\, \phi(z, w)\, f(x \oplus z)\, e^{2\pi i\theta[\mathrm{Im}(x+z)/2\pi]}\, dz\, dw = 0$$

Rappelons que $x \oplus z = \mathrm{Re}(x + z) + i2\pi\{\mathrm{Im}(x + z)/2\pi\}$. D'où

$$f(x \oplus z) = g(Re(x + z)) \cdot h(2\pi\{Im(x + z)/2\pi\}).$$

En posant $z = z_1 + iz_2$, nous avons $S_\theta(\phi) f =$

$$\int_{\mathbf{R}^1} g(t + z_1)\, \Big(\iiint_{\mathbf{R}}^3 e^{iRe(we^x)}\, \phi(z, w)\, h(2\pi\{(z_2 + \alpha)/2\pi\})\, e^{2\pi i\theta[(z_2 + \alpha)/2\pi]}\, dw\, dz_2\Big)\, dz_1 = 0$$

Puisque g est arbitraire, la partie entre parenthèses est égale à zéro presque partout pour dz_1. Nous montrerons que

$$\check{\phi} = \int_{\mathbf{C}} \exp(iRe(we^x))\, \phi(z, w)\, dw = 0, \text{ presque partout pour } dw.$$

En effet, on a

$$\int_{\mathbf{R}^1} \Big(\int_{\mathbf{C}} e^{iRe(we^x)}\, \phi(z, w)\, dw\Big)\, h(2\pi\{(z_2 + \alpha)/2\pi\})\, e^{2\pi i\theta[(z_2 + \alpha)/2\pi]}\, dz_2 = 0$$

En posant $z_2 + \alpha = \xi$, $\int_{\mathbf{C}} \exp(iRe(we^x)\, \phi(z, w)\, dw) = \check{\phi}(z, e^x)$

on a

$$\int_{\mathbf{R}^1} \check{\phi}(z, e^x)\, h(2\pi\{\xi/2\pi\})\, \exp(2\pi i\theta[\xi/2\pi])\, d\xi = 0 \text{ presque partout pout } dz_1.$$

On développe l'intégrale en série

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \phi(z, e^x)\, h(2\pi\{\xi/2\pi\}\, \exp(2\pi i\theta[\xi/2\pi])\, d\xi = 0$$

presque partout pour dw_1. En notant la partie comprise entre les parenthèses par a_k on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{2\pi ik\theta},\ \theta \in S^1$$

Or la transformation de Fourier est injective, donc $a_k = 0$ pour tout k, autrement dit,

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \hat{\phi}(z, e^x)\, h(2\pi\{\xi/2\pi\})\, d\xi = 0, \ k.$$

puisque h est arbitraire, $\widetilde{\phi}(z, e^x) = 0$ presque partout pour $d\xi$ sur $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$, $\forall\, k$, donc sur $\mathbf{R}$, c'est-à-dire,

$$\int_{\mathbf{C}} \exp\,(iRe\,(we^x))\,\phi\,(z, w)\,dw = 0, \text{ presque partout pour } dz_1\, d\xi = dz.$$

Prenons maintenant une suite $\{x_n\}$ telle que $\mathrm{Re}\,x_n = -n$ nous voyons que pour tout n,

$$\int_{\mathbf{C}} \exp\,(iRe\,(we^x)\,\phi\,(z, w)\,dw = 0, \text{ presque partout pour } dz.$$

Il est clair que

$$\int_{\mathbf{C}} \exp\,(ieRe(we^{x_n})\,\phi\,(z, w)\,dw = 0 \qquad x_n \text{ presque partout pour } dz.$$

Or $\widetilde{\phi}$ est continue $e^{x_n} \to 0$ quand $n \to \infty$, donc

$$\widetilde{\phi}\,(z, \exp\,(x_n))_{n\to\infty}\,\widetilde{\phi}(z, 0)$$

Donc $\widetilde{\phi}\ (z.0=0,$ i. e $\int_{\mathbf{C}} \phi\,(z, w)\,dw = 0$, presque partout pour dz. Par conséquent $\bigcup_\lambda(\phi) = 0$, $\forall\lambda$. D'une manière tout analogue à celle de A_2, on a:

D.5 PROPOSITION. Φ *est un *-isomorphisme des* $\mathbf{C}^*$*-algèbres*

$$\Phi : \bigcap_\lambda \mathrm{Ker}\ U_\lambda \xrightarrow{\cong} C\,(S^1, K\,(H))$$

Preuve. D'apprès lemmes D.2, D.3

$$\Phi\,(\bigcap_{\varepsilon,\gamma} \mathrm{Ker}\ U_\lambda^\varepsilon) \subset \mathbf{C}\ (S^1, K\,(H).$$

D'après le lemme D. 4, Φ est un monomorphisme. Il reste à montrer que Φ est surjectif.

Remarquons d'abord que $I = \bigcap_\lambda \mathrm{Ker} U_\lambda$ est un idéal bilatère fermé (cf. la dém. de A. 4), donc $\Phi\ (I)$ est une sous-algèbre de $C(S^1, K(H))$. On a

$\hat{I} \hookrightarrow \widehat{C^*(\mathrm{Aff}\,\mathbf{C})}$ (cf. J. Dixmier [1, §3.2.1].)

De plus $\pi \in \widehat{(C^*\,\mathrm{Aff}C))}$, $\pi(I) \subset K(H)$, donc I est une CCR—C*-algèbre. Il est facile de vérifier que pour tout $\theta_1 \neq \theta_2 \in S^1$,

$$S_{\theta_1}\,|_I \neq S_{\theta_2}\,|_I \in \hat{I}.$$

Alors d'après J. Dixmier [1, §4.2.5], $\forall\ \theta_1 \neq \theta_2 \in S^1$; $\zeta_1, \zeta_2 \in K(H)$ il existe $\phi \in I$ tel que $S_{\theta_1}(\Phi) = \zeta_1, S_{\theta_2}(\phi) = \zeta_2$, autrement dit

$$\Phi(\phi)(\theta_i) = \zeta_i \qquad , i = 1,2.$$

En raison du lemme 10.5.3 de j. Dixmier [1], on a

$$\Phi(I) = S(_1, K(H)).$$

D.6. THÉORÈME. 4. *On a la suite exacte courte suivante*

$$O \to C(S^1, K(H)) \to C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\, C})^+ \to C(S^2) \to 0$$

Preuve. D'abord on remarque que $C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}})^+ / C(S^1, K(H))$ est une C^*-algèbre commutative d'une manière tout à fait analogue à celle du théorème 2.

D'autre part

$$C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}})^+ / C(S^1, K(H)) \cong C(X), \text{ où } X = \left(C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\,\mathbf{C}})^+ / \bigcap_{\lambda \in \mathbf{C}} \mathrm{Ker}\, U_\lambda\right)^{\widehat{}} = S^2.$$

Donc, on a obtenu la suite exacte courte ci-dessus.

D. 7. D'après J. Dixmier [1, § 11. 5.3], il existe un isomorphisme

$$C(S^1, K(H) \cong C(S^1) \otimes K(H).$$

Donc notre extension est un élément de Ext $(C(S^2), C(S^1))$. Nous calculons d'abord les K-groupes

$$K_o(C(S^2)) = K^o(S^2) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$$

$$K_o(C_o(\mathbf{R}^2)) = \mathrm{Ker}(K_o(C(S^2)) \to \mathbf{Z}) = \mathrm{Ker}(K^o(S^2) \to \mathbf{Z}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \to \mathbf{Z})$$

$$K_o(C(S^1)) = K^o(S^1) = \mathbf{Z}$$

$$K_1(C_o \mathbf{R}^2)) = K_o(C_o(\mathbf{R}^2) \otimes C_o(\mathbf{R}^1)) = \mathrm{Ker}(K_o(C(S^3)) \to \mathbf{Z})$$

$$= \mathrm{Ker}(K^o(S^3) \to \mathbf{Z}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}) = 0$$

$$K_1(C(S^1)) = K_o(C(S^1) \oplus C_o(\mathbf{R}^1)) = \mathrm{Ker}(K_o(C(S^2))) \to \mathbf{Z}) =$$

$$= \mathrm{Ker}(K^o(S^2) \to \mathbf{Z}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$$

D'après le théorème de 3. 2. 3., nous avons

$$\mathrm{Ext}(C_0(\mathbf{R}^2), C(S^1)) \cong \mathrm{Hom}(K_0(C_0(\mathbf{R}^2)), K_1(C(S^1))) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}.$$

Considérons la suite exacte des K-groupes

$$\mathbf{Z} \to K_0(C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\, C})) \to \mathbf{Z} \xrightarrow{\delta_o} \mathbf{Z} \to K1(C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\, C}) \to 0$$

Remarquons que $\delta_1 = 0$; Or $K_1(C^*(\widetilde{\mathrm{Aff}\, C}))=0$ en raison du théorème 3. 2. 2., d'où δ_0 ; $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ est un isomorphisme. Donc

Index $C^*(\widetilde{\text{Aff}}\text{-}C) = 1$.

Nous avons prouvé le résultat :

THÉORÈME 5. *La C^*-algèbre $C^*(\widetilde{Aff}\ C)$ correspond à l'élément Index $C^*(\widetilde{Aff}\ C) = 1$ dans le groupe Ext $(C_0(\mathbf{R}^2), C(S^1)) = \mathbf{Z}$.*

§4. SUR LA CLASSE DES ALGÈBRES DE LIE AVANT LA PROPRIÉTÉ MD.

Soit G un groupe de Lie réel résoluble dont l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ possède la propriété MD.

4. 1. PROPOSITION (voir P. Bernat et Coll. [1], A. S. Miščenko — A. T. Fomenko [1]). *Soit F un élément de l'espace dual $\mathcal{G}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Si l'orbite Ω_F est de dimension maximale, l'algèbre $\mathcal{G}_F$ est commutatif.*

4. 2. THÉORÈME. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie réelle résoluble de classe MD. Alors $\mathcal{G}^2 = [[\mathcal{G}, \mathcal{G}], [\mathcal{G}, \mathcal{G}]]$ est un idéal commutatif de $\mathcal{G}$.*

Preuve. Soient $\mathcal{G}^1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$,

$$\mathcal{G}^2 = [\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^1],$$

Remarquons d'abord que pour tout élément non nul E de $\mathcal{G}$ n'induisant pas à 0 sur $\mathcal{G}^1$, l'orbite Ω_F est de dimension maximale.

En effet, s'il en était autrement, dim $\Omega_F = 0$, d'où dim G_F = dim G, donc Ker $B_F = \mathcal{G}_F = \mathcal{G}$. C'est-à-dire

$< F, [\mathcal{G}, \mathcal{G}] > = < F, \mathcal{G} > = 0$, ce qui contradirait l'hypothèse $F|_{\mathcal{G}^1} = 0$.

Prenons maintenant $F \in \mathcal{G}^*$, $F|_{\mathcal{G}^1} \neq 0$, $F|_{\mathcal{G}^2} = 0$. Alors dim Ω_E est maximale, donc $\mathcal{G}_F$ est commutative. D'autre part $\mathcal{G}^2 \subset \mathcal{G}_F$ car

$$< F, [\mathcal{G}^2, \mathcal{G}] > \subset < F, \mathcal{G}^2 > = 0$$

Donc $\mathcal{G}^2$ est commutative.

Remarque. D'après les définitions, on a les isomorphismes suivants entre algèbres de Lie

$$\mathcal{G} / \mathcal{G}^1 \cong \mathbf{R}^k$$
$$\mathcal{G} / \mathcal{G}^2 \cong \mathbf{R}^l$$
$$\mathcal{G}^2 \cong \mathbf{R}^m$$

Nous citons le cas des produits semi-directs

$$= \mathbf{R}^k . (\mathbf{R}^l \ . \mathbf{R}^m).$$

Comme exemples génériques. Les exemples de produits semi-directs $\mathbf{R}^k \ \mathbf{R}^l$ sont considérés par J. Rosenberg [1] et B. G. Kasparov [2, 3].

Nous construisons maintenant une algèbre de Lie de class MD avec $\mathcal{G}^2$ non trivial.

Soit T, X, Y, Z une base de $\mathcal{G}$. Le produit de Lie est donné par

$$[T,X] = -X \qquad [T,Y] = Y \qquad [T,Z] = 0$$
$$[X,Y] = Z \qquad [X,Z] = 0 \qquad [Y,Z] = 0$$

Il est aisé de vérifier que c'est une algèbre de Lie réelle résoluble et

$\mathcal{G}^1 = \{X,Y,Z\}$ (algèbre de Heisenberg)

$\mathcal{G}^2 = \{Z\} \neq 0$

Nous montrerons que si $0 \neq F$ et $F|_{\mathcal{G}^1} = 0$, $\mathrm{Ker}\, B_F = \mathcal{G}_F = \mathcal{G}$, d'où dim $\mathcal{G}_F = \dim G$.

Donc $\dim \Omega_F = 0$. Au contraire si $0 \neq F \in (\mathcal{G}/_{\mathcal{G}^2})^* \hookrightarrow \mathcal{G}^*$ et si $F|_{\mathcal{G}^1} \neq 0$, on a

$$\dim B_F = \dim \mathcal{G}_F = 2, \text{ donc } \dim G_F = 2, \ \dim \Omega_F = 2.$$

En effet pour tout F de $\mathcal{G}^*$, $F = \alpha X^* + \beta Y^* + \gamma Z^* + \delta T^*$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$, $\{X^*, Y^*, Z^*, T^*\}$ est la base duale de la base $\{X, Y, T, Z\}$. On a

$$\mathcal{G}_F = \mathrm{Ker}\, B_F = \{U \in \mathcal{G}\, ; < F, [U, X] > = < F, [U, Y] > = < F, [U, Z] > =$$
$$= < F, [U, T] > = 0\} \qquad (*)$$

Soit $U = aX + bY + cZ + dF$.

D'après (*) on a

$$U \in \mathcal{G}_F \Leftrightarrow \begin{cases} -b\gamma - d\alpha = 0 \\ a\gamma + d\beta = 0 \\ a\alpha - b\beta = 0 \\ c \in \mathbf{R} \end{cases}$$

1) Si $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\mathcal{G}_F = \mathcal{G}$

2) Si $\gamma \neq 0$, on a $b = -\dfrac{\alpha}{\gamma} d$, $a = \dfrac{\beta}{\gamma} d$, d arbitraire

Donc $\mathcal{G}_F = \{U = \left(-\dfrac{\beta}{\gamma} X - \dfrac{\alpha}{\gamma} Y + T\right) d + cZ\}$.

D'où dim $\mathcal{G}_F = 2$

3) Si $\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, on a $d = 0$, $a = \dfrac{\beta}{\alpha} b$, $b \in \mathbf{R}$

Donc $\mathcal{G}_F = \{U = b\left(\frac{\beta}{\alpha} X + Y\right) + cZ\}$, d'où dim $\mathcal{G}_F = 2$.

4) Si $\gamma = \beta = 0$, $\alpha \neq 0$ on a $d = a = 0$, $b \ni \mathbf{R}$

$$\mathcal{G}_F = \{U = bY + cZ\}, \text{ donc dim } \mathcal{G}_F = 2$$

5) Si, enfin $\gamma = \alpha = 0, \beta \neq 0$, d'une manière analogue on a

$$\mathcal{G}_F = \{U = aX + cZ\}, \text{ donc dim } \mathcal{G}_F = 2.$$

4. 4. Nous terminons le travail en posant deux problèmes ouverts

PROBLÈME 1. Chercher toutes les algèbres de Lie réelles résolubles de classe MD.

PROBLÈME 2. Décrire les **C*-algèbre** des groupes de Lie correspondant (Problème 1) à l'aide d'un K-foncteur convenable.

VII. 2. SUR LES AUTRES EXEMPLES ANALOGUES.

Un des exemples étudiés dans l'Appendice B était un fait nouveau de l'article [1] de l'auteur D.N.Ziêp. Après la publication, J. Rosenberg [1] a développé l'idée de l'auteur pour étudier la structure des C*-algèbres des autres groupes « de ce type ». Ici, nous faisons quelques remarques sur ces exemples.

VII. 2. 1. Soient $\mathbf{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques, Aff $\mathbf{Q}_p$ le groupe des transformations affines de la droite p-adique $\mathbf{Q}_p$. Ce groupe est isomorphe au groupe des matrices de type $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbf{Q}_p^* = \mathbf{Q}_p \setminus \{0\}$, $b \in \mathbf{Q}_p$. Désignons par H le sous-groupe de $K^* = \mathbf{Q}_p^*$, qui se compose des éléments de K de valeur absolue 1.

Alors K^*, H sont abéliens, commutatifs, et

$$K^* \cong Z \oplus H,$$
$$(K^*)\widehat{\ } = T \times \widehat{H},$$

où $\widehat{H}$ est un ensemble discret, infini. Par des raisonnements tout analogues à ceux du §VII. 1., nous pouvons prouver les résultats :

a) *La* C**-algèbre* C* (Aff $\mathbf{Q}_p$ (*est incluse dans la suite exacte courte*

$$0 \to K(H) \to C^*(\text{Aff } \mathbf{Q}_p) \to C(X) \to 0,$$

où X est une compactification par un point de l'ensemble $\mathbf{T} \times \widehat{H}$. (*Alors X est isomorphe à l'ensemble*

$$\{z \in \mathbf{C} ; z = 0 \text{ ou } |z| = 2^{-n}, n = 1, 2, \ldots\}).$$

b) La structure de la C^*-algèbre $C^*(\mathrm{Aff}\ \mathbf{Q}_p)$ est uniquement déterminée par l'invariant topologique Index C^* ($\mathrm{Aff}\ \mathbf{Q}_p$), *qui est égal à la somme des générateurs du groupe* $\mathbf{Z}\oplus\ \mathbf{Z}\oplus\ldots$

VII. 2. 2. Les mêmes résultats peuvent être obtenus pour un corps non discret totalement discontinu localement compact arbitraire.

VII. 2. 3. Soit $G = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^m$ le produit semi-direct du sous-groupe $\mathbf{R}$ et du sous-groupe invariant $\mathbf{R}^m$ avec les racines de l'action de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^m$, $\alpha_1, \ldots \alpha_m$, telles que $\mathrm{Re}\,\alpha_i$, $i = 1, \ldots m$, aient le même signe.

Le groupe G est isomorphe au groupe des suites $(a\,;\ b_1, \ldots, b_m)$ avec la multiplication

$$(a, b_1, \ldots, b_m)(a', b'_1, \ldots, b'_m) = (a + a', e^{\alpha_1 a} b'_1 + b_1, \ldots e^{\alpha_m a} b'_m + b_m)$$

Comme les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ont même signe, les orbites de l'action de $\mathbf{R}$ sur $(\mathbf{R}^m)^\wedge \cong \mathbf{R}^m$ sont ou bien $\{0\}$, ou bien des courbes, topologiquement équivalentes aux demi-droites partant de l'origine $0 \in \mathbf{R}^m$.

Comme G est un produit semi-direct de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^m$, la C^*-algèbre de G est isomorphe à la C^*-algèbre du groupe des transformations topologiques de $(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$. La classe des conjugaisons topologiques du groupe des transformations topologiques $(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$ ne dépendant pas de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, tous les groupes des transformations $(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$ ont leurs C^*-algèbres isomorphes. Alors on peut restreindre la considération au cas $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 1$. Alors les orbites de $\mathbf{R}$ dans $(\mathbf{R}^m)^\wedge$ sont énumérées par la sphère de dimension m-1, S^{m-1}.

Supposons que $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in_m S^{m-1}$. Alors le caractère de $\mathbf{R}^m$

$$b = (b_1, \ldots, b_m) \to e^{i\xi \cdot b} = \exp\,(i \sum_{j=1} \xi_j\, b_j)$$

induit une représentation de dimension infinie π_ξ de G, qui est réalisée dans l'espace hilbertien $L^2\,(\mathbf{R})$ par la formule

$$\pi_\xi(a, b)\, f\,(x) = \exp\, i\,(\xi_1\, e^{-x}\, b_1 + \ldots + \xi_m\, e^{-x}\, b_m)\, f(x + a).$$

La représentation triviale de $\mathbf{R}^m$ se prolonge naturellement en une série des représentations de dimension 1.

$$U_\lambda\,(a, b_n, \ldots, b_m) = e^{i\lambda a}, \text{ où } \lambda \in \mathbf{R}.$$

D'après la théorie de Mackey les représentations π_ζ, $\zeta \in S^{m-1}$ et U_λ, $\lambda \in \mathbf{R}$ forment le dual de $G = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^m$.

Par une raison analogue à celle de l' Appendice B, nous avons le résultat:

La structure de la C^*-algèbre du groupe $G = \mathbb{R} \cdot \mathbb{R}^m$ est uniquement déterminée par l'invariant topologique Index $C^*(\mathbb{R} \cdot \mathbb{R}^m)$, qui est égale à une fonction

$$\phi \in \prod_{\zeta \in S^{m-1}} Ext(S^1_\zeta) = \mathbf{Z}^X, \text{ où } X = S^{m-1}, \ S^1_\zeta \approx S^1,$$

telle qu'elle a une valeur constante-1 sur la sphère S^{m-1}, voir j. Rosenberg [1].

VII. 2. 4. La méthode des invariants topologiques s'est appliquée à l'étude des C^*-algèbres de tous les groupes de Lie de dimension 3: Pour le groupe de Heisenberg H_3, G. G. Kasparov [2] a annoncé ce que la *structure de la C^*-algèbre $C^*(H_3)$ est uniquement déterminée par l'invariant topologique qui est justement l'élément générateur du groupe* Ext $(C_0(\mathbf{R}^2), C(\mathbf{R}, \mathcal{K}(H))) \cong \mathbf{Z}$. Pour les autres groupes de Lie de dimension 3 nous avons fait l'étude plus haut.

Received April 16, 1983

BIBLIOGRAPHIE

E. M. ANDREEV, E. B. VINBERG, A. G. ELASVILI

(1) Les orbites de dimension maximale des groupes linéaires semi-simples, Funkt. Anal. Priloz., *t. 1, N°4, 1967, 3 6 7. (en russe).*

L. AUSLANDER, B. KOSTANT

(1) Polarisations and unitary representations of solvable lie groups, Invent. Math., *vol.* 14, N°4 (1971), 255 — 354.

P. BERNAT, N. CONZE, M. DUFLO et coll.

(1) Représentations des groupes de Lie résolubles, Paris, Dunod, 1972.

P. BLATTNER.

(1) On induced representations, I, II, Amer. Jonrn. Math., *vol. 83, N°1, 1961, 79 — 98, vol. 83, N°3, 1961, 499 — 512.*

N. BOURBAKI.

(1) Variétés différentielles et analytiques, Fascicule de résultats, Hermann, Paris, *1967 & 1971.*

L. G. BROWN

(1) *Extensions and the structure of C^*—algebras*, Instituto Nazionale di Alta Matematica, Symp. Math. *20, 1976, 539—566.*

L.G.BROWN, R.G.DOUGLAS, P.A.FILLMORE

(1) *Extensions of C^*—algebras*, Ann. of Math., série 2, vol. *105*, N°2, *1977*, *265 — 324*.

(2) *Extensions of C^*—algebras, operators with compact, self—commutators, and K—homology*, Bull. AMS, *vol. 79*, N°5, *1973*, *973 — 978*.

R.C.BUSBY

(1) *Double centralizers and extensions of C^*—algebras*, Transactions AMS, *vol. 132, 1968, 79—99,*

A.CONNES

(1) *An analogue of the Thom isomorphism for cross products of a C^*—algebra by an action of R.* Advances Math., *Vol. 38, 1980.*

J. DIXMIER

(1) *Les C^*-algèbres et leurs représentations*, 2ème éd., Paris, Gauthier-Villars, 1969.

G.G. EMCH

(1) *Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory*, *Wiley-Interscience, a division of John Wiley and sons*, Inc., New York, London, Sydney, Toronto, 1972.

J. M. G. FELL

(1) *A new proof that nilpotent groups are CCR*, Proceed. Amer. Math. Soc., vol. 13, 1962, 93-99.

(2) *Weak containment and Induced Representations of groups,*

I, Canad. J. Math. vol. 14, № 2, 1962, 237—268

II, Trans. AMS, vol. 110, № 3, 1964, 424—447

(3) *The structure of algebras of operator fields*. Acta Math., 106, 1961, 233—280.

J. M. GELFAND, M.A. NAIMARK

(1) *Représentations unitaires du groupe des transformations linéaires de la droite*, Doclady AN SSSR, t.55 № 7, 1947, 571—574, (en russe).

P. HILTON, S. WYLIE

(1) *Homology Theory*, Cambridge, 1960.

J. KAMINKER, C. SCHOCHET

(1) *Steenrod homology and operator algebras*, Bull. AMS, vol. 81, № 2, 1975, 431—434.

M. KAROUBI

(1) *K-theory: An Introduction*. Grundlehren der Math., Wissenschaften, № 226, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

G.G. KASPAROV

(1) *Invariants topologiques des opérateurs elliptiques. I. K-Homologies*, Izvestiya AN SSSR, Ser. Math., 39, № 4, 1975, 796–838.

(2) *The K-functor in the Theory of extensions of C^*-algebras*, Funkt. Anal. Priloz., t. 13, № 4, 1979, 37–74 (en russe).

(3) *The Operator K-functor and extensions of C^*-algebras*, Izvestiya AN SSSR, Ser. Math. 44, 1980, 571–636 (en russe)

A. A. KIRILLOV

(1) *Elements of the Theory of Representations*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg — New York, 1976.

(2) *Constructions des représentations unitaires irréductibles de groupes de Lie*, Vestnik MGV, *t.25, N°1, 1970, 41-51* (en russe).

(3) *Représentations unitaires du groupe de difféomorphismes et de quelques sous-groupes* Inst. Math. Appliquée, preprint N°82. *1974* (en russe).

Y. KOSMANN-SCHWARZBACH

(1) *Dérivée de Lie des morphismes de fibré*, publication Math. de l'Univ. Paris *VII, t.3*, Géométrie différentielle.

B. KOSTANT

(1) *Quantizations and Unitary Representations*, Part I, Prequantization, Lecture Notes in Modern Analysis and Applications, I. Lecture Notes in Math. vol. *170, pp. 87-208*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, *1978*.

L. LIPSMANN

(1) *Group Representations*, Lecture Notes in Math., vol. *338*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, *1974*.

G. W. MACKEY

(1) *Infinite Dimensional Group Representations*, Colloquium Lectures given at Stillwater, Oklahoma, August 29-September *1, 1961* (Sixty-sixth summer meeting of the AMS).

A. S. MIŠČENKO, A.T. FOMENKO.

(1) *Méthode de Liouvlile généralisée d'intégration des systèmes Hamiltoniens*, Funkt. Anal priloz., *t. 12, N°2, 1978, 46-56*,

L. PUKANSZKY

(1) *Unitary Representations of Solvable Lie Groups*, Ann. Sci. Ecole Normale Sup., Série *4, t. 4, N°4, 1971, 457-608*.

A. ROSENBERG

(1) *The number of irreducible representations of simple rings with no minimal Ideals.* Amer. J. Math., vol. *75, 1953, 523-530.*

J. ROSENBERG

(1) *The C^*-algebras of some real and p-adic solvable groups.* Pacific J. Math. (2) vol. *105, $N^0 2$, 1977, 265 — 324.*

(2) *Homological Invariants of Extensions of C^*-algebras,* Proc. Symp. Pure Math: vol. *38,* AMS, Providence, R. I., *1982, 35 — 75.*

J. ROSENBERG C. SCHOCHET

(1) *The classification of Extensions of C^*-algebras,* Bull. AMS, New Serie, *4 (1981) 105 — 110.*

B. J. ROSENFEL'D

(1) *Sur la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de contact,* Funkt Anal. Priloz. *t. 4, $N^0 2$, 1970, 91 — 92.*

R. SULANKE, P. WINTGEN

(1) *Differential geometrie und Faserbündel,* Berlin, Vel. Deutscher Verlag der Wissenchaften.

D. N. ZIEP

(1) *Sur la structure de la C^*-algèbre du groupe des transformations affine de la droite réelle,* Funkt. Anal. Priloz. *t. 9, $N^0 1$, 1975, 63 — 64* (en russe) = Funct. Anal. Appl; (transl. from Russian by AMS) *9, 1975, 58—60, ♯Zbl 347, 46067, MR 51 ♯793 (1976).*

(2) *Sur la structure des C^*-algèbres de type I,* Vestnik MGU, *1978, $N_0 2$, 91 — 87,* Refer. Journ. *10b925, 1978* (en russe) = Mosc. Univ. Math. Bull. (transl. from Russian by AMS) *33 (1978), MR 80 K: 46064.*

(3) *Méthode des Invariants topologiques dans l'étude de la structure des C^*-algèbres de groupes,* Actes de la Conférence Ann. de l'Inst. Math. Hanoi *5/1978* (en vietnamien).

(4) *Foncteur de la limite projective dans les catégories de Banach,* Tap Chi Toan Hoc (= Journal of Math.) *t. IX,* $N^0 1$, *1981, 16 — 20* (en vietnamien).

(5) *Multidimensional Quantization. I. The general construction,* Acta Mathematica Vietnamica, *t. 5, $N^0 2$, 1980, 42 — 55,*

(6) *Multidimensional quantization. II. The covariant derivation.* Acta. Math. Viet. *t. 7, $N^0 1$, 1982, 87 — 93.*

(7) *Quantification Multidimensionelle. III. Applications sur les représentations irréductibles des groupes de difféomorphismes,* Acta Math. Viet, *t. 8, $N^0 1$ 1983.*

(8) *Construction des représentations unitaires par les K-orbites et quantification.* C. R. Acad. Sc. Paris, *t. 291, 1980,* série *A, 295 — 298, MR 81j : 22017.*

(9) *Quantification géométrique*, Tap chi Toan hoc (à paraître en vietnamien. *1983*).

(10) *Méthodes topologiques dans l'analyse harmonique*, Fascicule des résultats, Hanoi, *1980*, (en vietnamien).

(11) *Idéaux de type compact associés aux représentations irréductibles induites par des représentations liminaires des sous-groupes invariants*, C. R. Acad Sc. Paris, *t. 294*, *1982*, série *I*, *189 – 192*.

(12) *Quantification des systèmes hamiltoniens à l'action plate d'un groupe de Lie*, C. R. Acad. Sc. Paris, *t. 295*, Série *I*, N^o4, *1982*, *345 – 348*.

(13) *Sur la structure des C*-algèbres d'une classe des groupes de Lie*, Preprint N^o7, *1981* de l'Inst. Math. Hanoi, (travail commun à V. M. Son et H. H. Viet).

(14) *Application du K-foncteur* Ext (.) *à l'étude de la structure des* C*-*algèbres de quelques groupes de Lie résolubles*, Thèse de Candidates sciences physico-Mathématiques, Moscow, *1977*, (en russe).